

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

I Міжнародна XX Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

7–9 квітня 2014 року



Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

I Міжнародна XX Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

7–9 квітня 2014 року

Матеріали конференції

Львів – 2014

Оргкомітет конференції:

М.Я. Бартіш	завідувач кафедри теорії оптимальних процесів, д-р фіз.-мат. наук, професор
В.С. Височанський	завідувач кафедри програмування, канд фіз.-мат. наук, професор
О.П. Гнатишин	заступник декана з навчально-виховної та наукової роботи факультету прикладної математики та інформатики
М.М. Притула	завідувач кафедри теорії дискретного аналізу та інтелектуальних систем, д-р фіз.-мат. наук, професор
Я.Г. Савула	декан факультету прикладної математики та інформатики, завідувач кафедри прикладної математики, д-р фіз.-мат. наук, професор
Р.С. Хапко	завідувач кафедри обчислювальної математики, д-р фіз.-мат. наук, професор
Г.Г. Цегелик	завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів, д-р фіз.-мат. наук, професор
Г.А. Шинкаренко	завідувач кафедри інформаційних систем, д-р фіз.-мат. наук, професор
С.А. Ярошко	завідувач кафедри програмування, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.М. Кухарський	доцент кафедри прикладної математики, канд. фіз.-мат. наук
М.В. Ярошевська	асистент кафедри прикладної математики

Зміст

R. Chapko*, B.T. Johansson**	10
ON THE ALTERNATING METHOD FOR THE HYPERBOLIC DIRICHLET PROBLEM	10
R. Drebotiy	12
HP-ADAPTIVE FEM FOR 1D BOUNDARY VALUE PROBLEMS	12
D.V. Filchenko, V.O. Lyubchak	14
WEBOMETRIC DATA MINING SYSTEM: A CASE OF DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION	14
O. Hodych*, Y. Shcherbyna*	15
KOHONEN MAP IN THE CONTEXT OF GENERIC SELF-ORGANIZING FRAMEWORK	15
I. Katernyak*, V. Loboda*, V. Kukharsky **, Ya. Savula**	17
STRATEGY FOR ENTREPRENEURSHIP EDUCATION AT IVAN FRANKO NATIONAL UNIVERSITY “TOWARDS CREATING INNOVATION HUB IN IT AREA”	17
Y. Kokovska	19
INVESTIGATION OF THE STABILITY FOR ESTABLISHED FLOWS IN OPEN PSEUDOPRISMATIC CHANNELS	19
V. Kukharsky, Ya. Savula, M. Yaroshevska, N. Kukharska	21
SECTORIAL QUALIFICATIONS FRAMEWORKS IN INFORMATICS. PROBLEMS OF DEVELOPMENT AND ADAPTATION IN THE EDUCATIONAL SYSTEM OF UKRAINE.	21
R. Malets, H. Shynkarenko, P. Vahin	23
DEFORMATION OF THIN THERMOELASTIC SHELLS COMPLIANT TO SHEAR AND COMPRESSION	23
O.Yu. Ostapov*, H.A. Shynkarenko***, O.V. Vovk*	25
COMPUTABLE DOUBLE-SIDED A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS	25
Ya. Savula, A. Styahar	27
MULTISCALE MODELING OF DEFORMATION PROCESSES FOR THE BODIES WITH THIN COVERS AND INCLUSIONS	27
S.M. Shakhno, H.P. Yarmola	29
ON THE TWO-STEP TWO-PARAMETRIC SECANT TYPE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS	29
V. Stelmashchuk*, H. Shynkarenko***	30
ADAPTIVE FINITE ELEMENT MODELING OF PYROELECTRICITY FORCED VIBRATION PROBLEM	30
V. Trushevsky*, H. Shynkarenko***, N. Shcherbyna**	32

USE OF RADIAL BASIS FUNCTION NEURAL	32
P. Venherskyi	34
MATHEMATICAL MODELING PROBLEM OF FULL FLOW FOR SURFACE AND GROUNDWATER.....	34
Л.П. Бедратюк, Г.І. Бедратюк.....	36
ПОВНА СИСТЕМА ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ІНВАНІАНТІВ ПРОСТОГО ГРАФА ІЗ 5 ВЕРШИН.	36
І.Є. Бернакевич, П.П. Вагін, І.Я. Шот.....	37
ДЕФОРМУВАННЯ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ.....	37
М.І. Бехта	38
ПОБУДОВА ТА ВИКОРИСТАННЯ ЗБАГАЧЕНИХ СКІНЧЕН- НИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	38
Р. Бігун, Г. Цегелик	40
АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЙОГО ВИ- КОРИСТАННЯ В ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ	40
Б.Я. Благітко, Ю.С. Мочульський.....	42
ВПЛИВ ВЕЛИЧИНИ ЗАПІЗНЕННЯ КОМАНД УПРАВЛІННЯ НА ХАРАКТЕР ПОЛЬОТУ БЕЗПІЛОТНОГО КВАДРОКОПТЕРА	42
К.Є. Бобрівник, Н.І. Поворознюк.....	44
ПОБУДОВА МОДЕЛІ СТУДЕНТА ДЛЯ СИСТЕМИ УПРАВЛІН- НЯ НАВЧАННЯМ.....	44
І.М. Болеста, І.І. Колич, А.О. Колкевич, Я.А. Шмигельський, Р.Я. Шувар	45
МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ В ПРИСУТ- НОСТІ НАНОЧАСТИНОК.....	45
М.Б. Вітер.....	46
МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ В СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ ДЕРЖАВНИМИ ФІНАНСАМИ	46
А.П. Власюк, О.М. Багнюк	47
ЗНАХОДЖЕННЯ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ ДЖЕРЕЛА ЗАБРУДНЕ- ННЯ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ КОНВЕК- ТИВНОГО МАСОПЕРЕНОСУ В КРИВОЛІНІЙНОМУ ЧОТИРИ- КУТНИКУ	47
А.П. Власюк*, Т.А. Дроздовський**	49
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБЛАСТЕЙ ҐРУНТУ ПРИ НАГНІ- ТАННІ В НЬОГО В'ЯЖУЧОГО РОЗЧИНУ КОМБІНОВАНИМ МЕТО- ДОМ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЧИСЕЛЬНИХ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ	49
А.П. Власюк*, В.В. Жуковський**	51

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОЇ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ У НАСИЧЕНОМУ КАТАЛІТИЧНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ДО СИСТЕМИ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ФІЛЬТРІВ-ВЛОВЮВАЧІВ У ЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ	51
А.П. Власюк, В.М. Новак	53
АВТОМАТИЗАЦІЯ БІБЛІОТЕКИ УНІВЕРСИТЕТУ.....	53
А.П. Власюк*, Н.А. Федорчук**	54
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНОСЕННЯ ТА СИЛ ЗВ'ЯЗНОСТІ В ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ.....	54
А.П. Власюк*, Т.П. Цветкова **	56
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЛЕПЕРЕНОСЕННЯ ПІД ВПЛИВОМ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ.....	56
В.Д. Вовк.....	57
ВАРІАНТ РЕАЛІЗАЦІЇ ПОЛІМОРФІЗМУ В ORM-СИСТЕМІ.....	57
Р.А. Воробель	58
АПРОКСИМАЦІЯ КОНТУРНИХ КРИВИХ ПАРАБОЛІЧНИМИ СПЛАЙНАМИ	58
Б.І. Гайвась*, С.Я. Чапля**	60
КОНВЕКТИВНЕ ОСУШЕННЯ ЗЕРНИСТОГО МАТЕРІАЛУ З УРАХУВАННЯМ ДВОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ ОКРЕМОЇ ЗЕРНИНИ	60
О.З. Гірська, Н.М. Коркуна, Г.Г. Цегелик.....	62
ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ПОДАТКОВИХ НАДХОДЖЕНЬ ДО БЮДЖЕТУ УКРАЇНИ.....	62
М.І. Глебена*, Г.Г. Цегелик**.....	64
АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІЙ	64
Ю.П. Глухов.....	67
ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДВОХВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ.....	67
К.О. Гомон	69
ДЕКОМПОЗИЦІЯ ТА ПАРАЛЕЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ ДЛЯ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ	69
В.С. Гончарук, А.С. Давидок, С.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха	71
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕРМОДИУЗІЇ РОЗПАДНОЇ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ У ДВОФАЗНІЙ СТОХАСТИЧНО НЕОДНОРІДНІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ	71

В.М. Горлач*, І.В. Клименко*, Г.А. Шинкаренко***	73
ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ ПОШИРЕННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ У ДИСИПАТИВНІЙ РІДИНІ	73
Б.Є. Грицько	75
ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТІ З РОЗІМКНУТИМ ЛІПШИЦЕВИМ КОНТУРОМ.	75
І.І. Дияк*, М.Ф. Копитко*, Х.Р. Погранична**	77
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСТЕСИНТЕЗУ ПЕРЕЛОМІВ НИЖНЬОЇ ЩЕЛЕПИ ТИТАНОВИМИ ПЛАСТИНАМИ	77
Л.П. Добуляк, Г.Г. Цегелик	78
ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ МАЛИМ ПІДПРИЄМСТВОМ ВЗА- ТОГО КРЕДИТУ НА МОЖЛИВІ ВИДИ ДІЯЛЬНОСТІ З ВРАХУ- ВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ НА ПОТРЕБИ В КРЕДИТАХ	78
А.Б. Дорош, І.М. Черевко	80
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕ- РЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ МЕТОДОМ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ	80
А.А. Завацкая, Т.А. Григорова	82
СЕМАНТИЧЕСКИЙ ПОИСК В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦИОН- НОГО ОБУЧЕНИЯ	82
К.С. Іванків, Н.І. Король	84
ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФУЗІЙНОЇ НЕСТІЙКОСТІ В ТРЬОХКОМ- ПОНЕНТНІЙ СИСТЕМІ ТИПУ РЕАКЦІЯ-ДИФУЗІЯ	84
А.І. Кардаш	85
МИХАЙЛО КОРКУНА – ПЕДАГОГ ТА ВЧЕНИЙ	85
М.Я. Квик, Г.Г. Цегелик	88
ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ІННОВАЦІЙНИХ КОШТІВ СЕРЕД СУБ'ЄКТІВ ГОСПОДАРЮВАННЯ.	88
А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула	89
ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ, ОПЕРАТОР РЕКУРСІЇ ТА ІМПЛЕКТИЧНІ ОПЕРАТОРИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕ- МИ БРОЕРА-КАУПА-КУПЕРШМІДТА	89
А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула	91
ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЛІ-АЛГЕБРАІЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ З ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ.	91
О.В. Ковальчук	93
КОМБІНАЦІЯ МЕТОДІВ НЬЮТОНА ТА ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	93
О.С. Коссаєв, Я.М. Холявка	94
ЗАСТОСУВАННЯ КРИВИХ ЕДВАРДСА ПРИ ОБМІНІ ІНФОРМАЦІЄЮ	94

Р.П. Краснюк, Г.Г. Цегелик.....	95
ДВОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ ПОТУЖНОСТЕЙ КОМП'ЮТЕРІВ У GRID-СИСТЕМІ	95
Т.В. Кутя, П.М. Мартинюк	97
ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ НЕЛІНІЙНОСТІ КОЕФІЦІЄНТА ВОЛОГОПРОВІДНОСТІ НА ЗМІНУ НАСИЧЕНОСТІ ГРУНТОВОГО МАСИВУ.....	97
В.М. Кухарський	98
ВАРІАНТИ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ЗАЛИШКОВО-ВІЛЬНИХ БУЛЬБАШОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ З ВЕЛИКИМИ ЧИСЛАМИ ПЕКЛЕ	98
С.В. Літинський, А.О. Музичук	100
ПРО РОЗВИНЕННЯ ЗАПІЗНЮЮЧИХ ПОВЕРХНЕВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ПО ПОЛІНОМАХ ЛАГЕРА.....	100
Н. Лопух	101
РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ.....	101
О.В. Матвій, Л.А. Піддубна, І.М. Черевко	102
ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ.....	102
Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк	104
ПРО ВПЛИВ n - КОМПОНЕНТНОГО ХІМІЧНОГО РОЗЧИНУ НА ПРОЦЕС ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ГРУНТОВИХ ГРЕБЕЛЬ З ВОДОВОДАМИ.....	104
А.В. Мельничин, Г.Г. Цегелик	106
ОПТИМАЛЬНА ОРГАНІЗАЦІЯ БАГАТОРІВНЕВОГО БЛОКОВОГО ПОШУКУ ЗАПИСІВ У ФАЙЛАХ БАЗ ДАНИХ	106
В.В. Михаськів, О.І. Калиняк	108
ПОЧАСОВИЙ ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ	108
І.С. Муха	109
ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ОКОЛІ ВТРАТИ СТІКОСТІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ	109
Т.С. Нагірний***, Ю.А. Сенік*, К.А. Червінка***	110
ДО ОПИСУ РІВНОВАЖНОГО СТАНУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО НЕФЕРОМАГНІТНОГО ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА	110
Т.С. Нагірний***, К.А. Червінка ***	112
ПРИПОВЕРХНЕВА НЕОДНОРІДНІСТЬ У ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНІЙ ТЕРМОМЕХАНІЦІ.....	112

О.М. Назаренко, М.В. Карпуша	114
ВИКОРИСТАННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МОДЕЛЕЙ В БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ СТАТИСТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ.....	114
А.М. Недашковська.....	115
ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ З ДОПОМОГОЮ БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	115
Б. Остудін, Я. Гарасим, С. Кічура.....	116
ПРОБЛЕМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ В ЕЛЕКТРОННІЙ ОПТИЦІ	116
Я.Д. П'янило, С.Р. Твардовська	118
МЕТОДИ УТОЧНЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНОЕЛЕКТРО- МАГНІТНИХ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ СЕРЕДО- ВИЩАХ.....	118
О.П. Пелешишин	120
ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ПІДТРИМ- КИ ДІЯЛЬНОСТІ ПРЕДСТАВНИКІВ ПІДПРИЄМСТВА В ОНЛАЙН- СПІЛЬНОТАХ	120
Д.О. Поліщук, О.Д. Поліщук.....	122
ПРО МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ СКЛАДНИХ ІЄРАРХІЧНО- МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ.....	122
Д.О. Поліщук, О.Д. Поліщук.....	124
ПРО ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ВИСНОВКІВ ПРО ЯКІСТЬ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	124
В.С. Попович, Н.О. Заводовська	126
СКІНЧЕНИЙ ТЕРМОЧУТЛИВИЙ ПОРОЖНИСТИЙ ЦИЛІНДР ЗА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ З СЕРЕДОВИЩАМИ ЗМІН- НИХ ТЕМПЕРАТУР	126
Л.П. Процах, П.О. Савенко, М.Д. Ткач	127
НЕЛІНІЙНІ ДВОПАРАМЕТРИЧНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОБЛЕМИ НЕЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	127
Б.В. Процюк, О.П. Горун.....	129
МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗІСТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ БЕЗМЕЖНОГО НЕРІВНОМІРНО НАГРІТОГО ТРИСКЛА- ДОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТІЛА	129
В.П. Ревенко	131
ВИСОКОТОЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ І ЇХ ПОХІДНИХ НЕОРТОГОНАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ.....	131
Я.Г. Савула*, А.Р. Торський**.....	133
АНАЛІЗ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПОЧАТКОВО- КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ	133
О.С. Сахарчук, Г.Г. Цегелик	135

ЕФЕКТИВНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ.....	135
П.С. Сеньо.....	136
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ.....	136
Ю.М. Сибіль.....	137
ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ.....	137
Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський.....	138
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНО-ВОЛОГІСНИХ ПОЛІВ ТА РЕОЛОГІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КАПЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ.....	138
Ю.І. Турчин.....	140
ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ЛІКІВ У СТІНЦІ СУДИНИ.....	140
Л.І. Фундак, Г.Г. Цегелик.....	142
УЗАГАЛЬНЕНИЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	142
В.М. Цимбал.....	144
ПРО СУМІСНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ТА АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	144
О.Ю.Чернуха, В.Є. Гончарук, В.А. Дмитрук, І.Ю. Білушак.....	145
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ РОЗПАДНОЇ РЕЧОВИНИ В ШАРІ З ПЕРІОДИЧНО РОЗТАШОВАНИМИ ТОНКИМИ КАНАЛАМИ.....	145
В.В. Черняхівський.....	147
МАКСИМАЛЬНЕ ПОКРИТТЯ ГРАФА ПРОСТИМ ЦИКЛІЧНИМ ЛАНЦЮГОМ.....	147
І.А. Чир.....	149
ЗАДАЧА ДИНАМІЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТА ВЛАСТИВОСТІ ЇЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ПОСТАНОВКИ.....	149
С.П. Шевчук.....	151
МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ СМУГИ З ТОНКИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ.....	151
Я.А. Шмигельський.....	152
ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СЕРЕДНЬОЇ ТОЧКИ.....	152
К.І. Шумельчик, В.І. Кузьменко.....	153

ЩІЛИНА З РІДИНОЮ ВИСОКОГО ТИСКУ В ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ТІЛІ	153
М.В. Щербатий	155
ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ В МОДЕЛЯХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	155
О.С. Ярошко.....	156
ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АДИТИВНОЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ.....	156
Ю.О. Ящук	157
ЗАСТОСУВАННЯ Н-АДАПТИВНОЇ СХЕМИ МСЕ-МГЕ У ЗАДАЧАХ ПРУЖНОСТІ З ОСОБЛИВОСТЯМИ	157
АВТОРСЬКИЙ ПОКАЖЧИК	159

*R. Chapko**, *B.T. Johansson***

(*Ivan Franko National University of Lviv,

**EAS, Aston University, Birmingham, UK;

ITN, Campus Norrköping, Linköping University, Sweden)

ON THE ALTERNATING METHOD FOR THE HYPERBOLIC DIRICHLET PROBLEM

The alternating method was introduced in 1989, see [5], to solve some inverse ill-posed problems notably the Cauchy problem for a strongly elliptic and self-adjoint operator. Advantages of the alternating method are that it preserves the governing partial differential operator and that it is parameter free, for applications see [7]. The authors have extended the alternating method to unbounded domains, see for example [2], and studied procedures for parabolic problems [3]. In this note we highlight that the alternating method can be applied also for some inverse problems for hyperbolic operators (like the classical wave equation).

Consider the following problem

$$\begin{cases} u'' + Lu = 0, \text{ in } I, \\ u(0) = \varphi, \\ u(T) = \psi, \end{cases} \quad (1)$$

where $I = [0, T]$ with $T > 0$ a real number, L is an operator mapping into a space X . In the case when L is the Laplace operator Δ and X a suitable Hilbert space the solution to (1) can be written

$$u(t) = \frac{\sin(L^{1/2}(T-t))}{\sin(L^{1/2}T)}\varphi + \frac{\sin(L^{1/2}t)}{\sin(L^{1/2}T)}\psi. \quad (2)$$

Clearly, if the distance from the set $\{k\pi/T : k = 1, 2, \dots\}$ to the spectrum of L is zero, then (2) is ill-posed. This case was studied in the original paper [5].

However, we point out that using abstract results for two-point boundary value problems, notably [9,8], the operator L can be of the form $L = L(t) = A + B(t)$, with L being self-adjoint smooth and positive. Here, A is a linear operator which generates a cosine function $c(t)$ mapping into the space of bounded operators on X and satisfying $c(t+s) + c(t-s) = c(s)c(t)$, where $s, t \geq 0$, and $c(0) = I$. Moreover, $B(t)$ maps into the space of bounded linear operators on X see [8] for further criteria on B ; for more on second-order equations in Banach spaces, see [6, Chapter 3] and [4, Chapter 2]. Then, for

example, $L = L(t) = a(x)\Delta + b(x, t)u$. The possibility to use general operators in the alternating method was noted in [1].

We use the same steps also in this more general case as in the alternating method in [5] and one can prove convergence of the following procedure: The element u_{2k} satisfies the initial value problem

$$\begin{cases} u_{2k}'' + L(t)u_{2k} = 0, \text{ in } I, \\ u_{2k}(0) = \varphi, \\ u_{2k}'(0) = u_{2k-1}'(0), \end{cases} \quad (3)$$

where $u_0'(0) = \eta$ is arbitrary. The element u_{2k+1} is constructed as

$$\begin{cases} u_{2k+1}'' + L(t)u_{2k+1} = 0, \text{ in } I, \\ u_{2k+1}(T) = \psi, \\ u_{2k+1}'(T) = u_{2k}'(T), \end{cases} \quad (4)$$

and the method continues by iterating in these two steps.

For the numerical implementation, integral equations in combination with the method of Rothe can be an effective strategy in the spirit of what was done for parabolic in problems [3]. In the case of noisy data the discrepancy principle can be applied.

1. *Bastay G.*, 1995, Iterative methods for ill-posed boundary value problems // Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations, № 392.

2. *Chapko R.* and *Johansson B.T.*, 2008, An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for Laplace equation in semi-infinite domains // Inverse Problems and Imaging. Vol. 2 № 3, pp. 317–333.

3. *Chapko R.*, *Johansson B.T.* and *Vavrychuk V.*, 2011, Recovering boundary data in planar heat conduction using a boundary integral equation method // Electronic Journal of Boundary Elements. Vol. 9 № 1, pp. 1–15.

4. *Fattorini H.O.*, 1985, Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces // North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

5. *Kozlov V.A.* and *Maz'ya V.G.*, 1989, On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations // Algebra i Analiz. Vol. 1 № 5, pp. 144–170. English transl.: 1990, Leningrad Mathematical Journal. Vol. 1 № 5, pp. 1207–1228.

6. *Kreĭn S.G.*, 1971, Linear Differential Equations in Banach Space // AMS, Providence, R.I.

7. *Lesnic D.*, *Elliott L.* and *Ingham D.B.*, 1997, An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 20 № 2, pp. 123–133.

8. *Lin Y.*, 1998, Time-dependent perturbation theory for abstract evolution equations of second order // Studia Mathematica. Vol. 130 № 3, pp. 263–274.

9. *Serizawa H.* and *Watanabe M.*, 1986, Time-dependent perturbation for cosine families in Banach spaces // Houston Journal of Mathematics. Vol. 12 № 4, pp. 579–586.

HP-ADAPTIVE FEM FOR 1D BOUNDARY VALUE PROBLEMS

This paper is devoted to introduce *hp*-adaptive algorithm for finite element method (FEM) for one-dimensional convection-diffusion-reaction boundary value problems. It is based on a combination of classical implicit and explicit a posteriori error estimators (AEE). Results of computational experiments are used to compare the developed adaptive scheme with algorithm based on *reference solution*[1]. Convergence optimality analysis is provided for problems which produce symmetric bilinear forms in their variational formulation.

Model problem

Let us consider the next boundary value problem:

find function $u = u(x)$ such that

$$\begin{cases} -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f & \text{in } \Omega = (0, L), \\ (\mu u')|_{x=0} = \alpha[u(0) - \bar{u}_0], \quad -(\mu u')|_{x=L} = \gamma[u(L) - \bar{u}_L], \end{cases} \quad (1)$$

where $\alpha, \gamma \geq 0$, $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, $\sigma(x) \geq 0$ almost everywhere in Ω , $\mu, \beta, \sigma \in L^\infty(0, L)$, $f \in L^2(0, L)$.

Corresponding variational problem to (1) is approximately solved, using finite element method with high-order piecewise polynomial basis functions.

Adaptation algorithm

The described research follows previous investigation of adaptive FEM algorithm based on reference solution. Despite significant advantage in versatility compared to other types of algorithms, this approach has a significant drawback, namely the difficulty of theoretical investigation and justification of correctness. These deficiencies are the main factors that slow the development of commercial applications based on adaptive *hp*-FEM algorithms. Therefore it was decided to use well studied classical AEEs as a basis of the developed algorithm. The algorithm combines the use of explicit and implicit AEEs. Explicit AEE is used for the selection of finite elements, which need to be refined, and implicit to select the optimal element refinement patterns. More detailed, we choose pattern which have greater norm of error

approximation. It is motivated by equality: $\|u - \tilde{u}_h\|_E^2 \leq \|u - u_h\|_E^2 - \|e_h\|_E^2$, where u_h and $\tilde{u}_h$ are finite element approximations on two consequent meshes e_h – error $e = u - u_h$ approximation.

Numerical results

Let us consider problem (1) with following data:

$$\mu = 1, \beta = 0, \sigma = 10^5 e^x, f = 10^5, \alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1. \quad (2)$$

Table. Algorithm convergence history: acceptable level of relative error – 5%, maximum approximation polynomial degree – 9. Absolute error indicator is computed as weighted L^2 -norm of residual of problem (1) equation.

iteration	D.O.F.	absolute error indicator	relative error indicator, %
0	3	12579,37	6045,54
1	5	3998,07	1695,35
			
7	34	25,53	10,19
8	39	24,94	9,95
9	43	7,59	3,03

For data (2), algorithm based on reference solution terminates after 32 iterations (>3 times greater) with final count of D.O.F. – 437 (10 times greater).

1. Demkowicz L. Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems // Austin, Summer 2005;
2. W. Dorfler , V. Heuveline Convergence of an adaptive *hp* finite element strategy in one space dimension // Science Direct, Applied Numerical Mathematics 57 (2007) 1108-1124;
3. Ch. Schwab, *p* and *hp* Finite Element Methods // Oxford: Clarendon Press, 1998.
4. P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel, Higher-Order Finite Element Methods // London: Chapman & Hall, 2003.

WEBOMETRIC DATA MINING SYSTEM: A CASE OF DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION

Webometric data are commonly used as raw data for the further aggregation into various indexes, ranks, rates, ranges and other forms of web indicators. Such indicators may be considered as proxies in evaluation of different kind of activities: performance of different public service agencies (universities, research institutes, medical centers, etc.), repositories of research papers or OER, mass media, political parties etc. [1, 2]. Currently there is no all-in-one web data mining system available either in the open source or proprietary. And thus, the problem of developing of such a system encountered many researches, policy makers or other stakeholders.

There are three groups of webometric data one could use for the further analysis: data for measuring activity (number of files or webpages indexed by a specific crawler), data for measuring visibility (number of hyperlinks in Web 1.0 or other kinds of mentions in Web 2.0), and data for measuring popularity (number of visits, visitors or something like that). So as it reveals data sources of raw webometric data may be represented by log files of servers, analytical services like Google Analytics, browser toolbars like Alexa Toolbar, social media like Facebook or Twitter, search engines like Google or Yandex, other web crawlers like MajesticSEO, Ahrefs or SEOmoz, etc.

In this research we demonstrate the case of developing a web data mining system extracted from the different sources most of the aforementioned webometric data. The system was implemented in various projects like Extended G-Factor of Ukrainian Universities [2], Institutional Webometric Ranking at Sumy State University [3], Webometric Ranking of Ukrainian Primary and Secondary Education [4], etc.

1. *Aguillo I.F.* Measuring the Institution's Footprint in the Web / I.F. Aguillo // Library Hi Tech. — 2009. — 27 (4). — P. 540-556.

2. *Filchenko D.A.* Web Metrics of the Universities Mutual Impact: G-Factor Revisited / D. Filchenko, V. Lyubchak // Proceedings of the 8th International Conference on Webometrics, Informetrics and Scientometrics (WIS) & 13th COLLNET 2012 Meeting, October 23-26, 2012, Seoul, Ukraine. — Seoul. — 2012. — P. 240-243.

3. Institutional Webometric Ranking of Sumy State University (in Ukrainian). Access: http://web.sumdu.edu.ua/internal_webometrics_methodology.pdf.

4. Sumy Web Rank: The First Ukrainian Ranking Portal (in Ukrainian). Access: <http://ranking.sumdu.edu.ua>.

O. Hodych, Y. Shcherbyna**

(Lviv Polytechnic National University,
Ivan Franko National University of Lviv)

KOHONEN MAP IN THE CONTEXT OF GENERIC SELF-ORGANIZING FRAMEWORK

Kohonen map is an effective mathematical and software tool for visualization of high-dimensional data, which converts nonlinear statistical relationships in data into simple geometric relationships of two-dimensional grid of nodes [1] (Fig. 1). To our best knowledge the Kohonen map was not researched in the context of generic self-organizing framework from the perspective of pattern recognition [2]. Such approach has a potential to gain additional insight into their properties in order to develop rigorous theoretical foundations for Kohonen maps [3]. For example, this could be used for developing better comparison mechanisms of Kohonen maps with other unsupervised learning approaches.

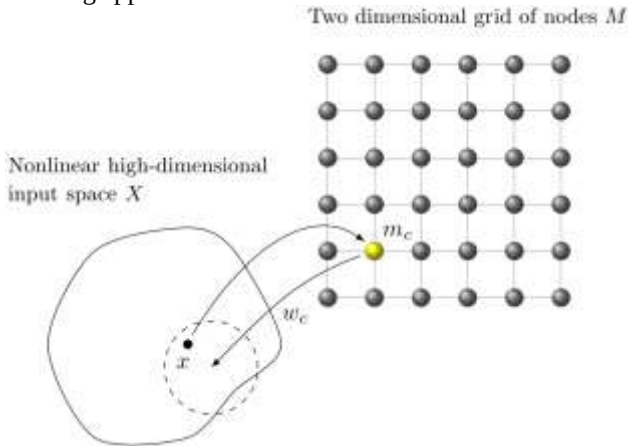


Fig. 1. Kohonen map

Let X be a data set being analyzed, and K – a set of recognition results. Function $q: X \rightarrow K$ is a parametric recognition strategy, with parameters B , that can be implemented by some algorithm R (Fig. 2). Algorithm R maps a sequence of vectors $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in X$ to a sequence of recognition results $\tilde{K} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i \in K$. Thus, $\tilde{K} = R(X, B)$. Let L be the learning algorithm (Fig. 3) that maps each pair (x_i, k_i) from these sequences to

corresponding parameter values B such that $B = L(\tilde{X}, \tilde{K})$. Fig. 4 illustrates a schematic representation of a generic self-organizing algorithm [2].

Let B_0 be some initial value for parameters B . This value is used for recognition of an input data sequence $\tilde{X}$, which leads to resulting recognition sequence $\tilde{K}_0$. These two sequences are used then as input for learning algorithm L as if they were the training sequences, received from a teacher under supervised learning. This results in the new parameter values $B_1 = L(\tilde{X}, \tilde{K}_0)$ that are then used to obtain new recognition results $K_1 = L(\tilde{X}, B_1)$ and so on. Such self-organizing process can be formalized as a recursive equation $K_t = R(\tilde{X}, L(\tilde{X}, B_{t-1}))$, where t is a moment in time [2].

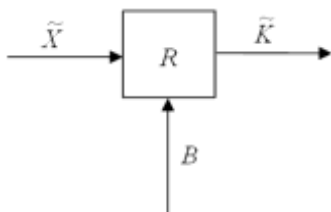


Fig. 2. Recognition algorithm

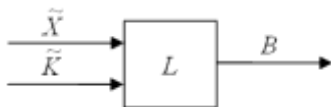


Fig. 3. Learning algorithm

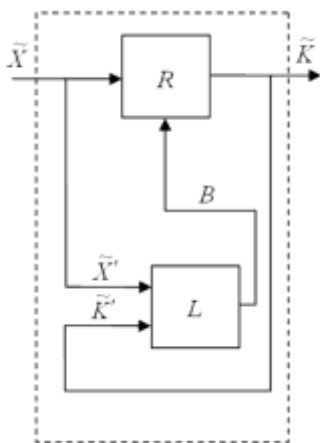


Fig. 4. Self-organization

It can be shown that Kohonen map is reducible to this generic self-organizing process. Specifically, X is the high-dimensional input data as in the generic case, K are the best matching units (BMU) in Kohonen map, R is a recognition algorithm that uses the BMU search strategy, B – parameters for strategy q that are represented by a set of weight vectors W , and finally L – an algorithm for modification of weight vectors W .

1. Kohonen T. Self-Organizing Maps (3rd edition) / T. Kohonen. — Springer, 2001. — 521 p.

2. Шлезингер М. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию / М. Шлезингер, В. Главач. — Наукова думка, 2004. — 545 с.

3. Cottrell M. Theoretical aspects of the SOM algorithm / M. Cottrell, J. Fort, G. Pagès // Proceedings of WSOM'97. — Helsinki University of Technology, Finland: 4–6 Jun 1997. — P. 246.

STRATEGY FOR ENTREPRENEURSHIP EDUCATION AT IVAN FRANKO NATIONAL UNIVERSITY “TOWARDS CREATING INNOVATION HUB IN IT AREA”

Education and research at state universities in Ukraine are structured around traditional subjects with a strong focus on natural science and basic engineering, where Ukraine has reached a high level in an international comparison. But today a shift from the culture of research that “can be applied” to “should be applied” is required. Research is still not so often closely linked to cooperation with entrepreneurs, private investors and companies. On this way a challenge is to develop entrepreneurial mindset in academic environment, to open up the universities to the surrounding society, and to develop entrepreneurship eco-system in the regions. Young people often have no confidence in their own abilities to create a new venture, to find bootstrap finance to support their first steps in entrepreneurship. Benefits of entrepreneurship education are measured not only by the number of newly created companies and jobs but also by the entrepreneurial capacity among students, which is the basis for national well-being and prosperity, competitiveness of the region.

Since 2005, IFU, together with UDL, have initiated and supported an annual event – Innovation Spring, which includes: a series of workshops “From Idea to Marketplace”, Idea Competition – “Idea Marathon”, and final Innovation Spring Forum where students and young researchers present their innovation concepts to business and research communities. The lesson we’ve learned is that a lot of encouragement is needed for students to take risks and start entrepreneurial activities.

In March 2010, IFU adopted the University Development Programme: “Ivan Franko National University of Lviv – Advanced European University” focused on forming cross-disciplinary groups and programmes for promoting leadership, and launching new curricula that respond to the labour market needs.

Currently, "Innovation and Entrepreneurship" programme for students of Ivan Franko National University of Lviv (IFU) is held by Stockholm University, supported by the Swedish Institute and organized by Ukrainian Distance Learning (UDL) System.

In general, as noted by employers, graduates of IT specialties of Ivan Franko National University of L’viv are highly qualified and have a good professional level. According to sociological research, based on the results of

processing of primary statistical data, the University took second place in the Ukrainian ranking of efficiency graduate employment.

However, in Ukraine there is no national framework for strategic policy on entrepreneurship education at a university level. So our strategy suggests developing entrepreneurship education together with eco-system for startups in the region. This requires:

- Shared understanding of the need for Entrepreneurship among the key stakeholders and encouraged collaboration on entrepreneurship education across universities in Lviv and establishing an Innovation Hub in the region as an entrepreneurship eco-system.
- Find and activate champions and establish implementation mechanisms (public or private agencies and/or foundations) to carry out strategies and policies through a set of coherent programmes.
- Formulate and pilot entrepreneurship course with involvement of business experience, interactive teaching methods, and eLearning format – First Generation web-portal for Innovation Hub. Facilitate this course as a cross-disciplinary programme and encourage student-led initiatives and activities to flourish.
- Create a Business Angels Network – Second Generation web-portal for Innovation Hub - where mentors/investors come together to collaborate, learn and explore synergies in order to help create new enterprises.
- Expand via more courses and more advanced courses (several specialized courses are to be offered in such topics as Cloud industry, Mobile application, Energy saving programming, Hardware oriented programming etc.) and help business angels to meet with talented students and graduates.
- IT Startup Accelerator “Innovation Hub” is to be created at the institutional level with the mission to improve students’ entrepreneurial mind-set and their ability to think different, to give practical tools for idea generation, to encourage diversity, to develop a high level of freedom in thinking and acting and to provide support for idea development into a business concept, to invite business angels and venture capitalists for IT start-ups.

Below follows a proposed step-by-step strategy to establish entrepreneurship education at IFU and creation of the Innovation Hub as an eco-system of stakeholders (e.g. business-angels, investors, experts, coaches, successful entrepreneurs). The strategy is a result of collaboration between Sweden, Georgia and Ukraine under the Swedish Institute (www.si.se) programme Thematic partnerships, knowledge intensive services ([link](#)).

In summary, a wide range of activities have been conducted in order to identify good examples, conduct actual entrepreneurship education, adapt experiences and knowledge to local business climate.

INVESTIGATION OF THE STABILITY FOR ESTABLISHED FLOWS IN OPEN PSEUDOPRISMATIC CHANNELS

Investigation of the stability of turbulent channel flow [1] associated with the following problems: on the one hand , you can get full information about the stability of the spatial formulation of the problem of hydrodynamics , on the other hand , the stability significantly affects the hydrodynamic pressure, data which does not extend beyond the one-dimensional idealization of channel flow. Therefore, this information narrows the limits of stability of turbulent channel flow. In such conditions is difficult to formulate general conditions for stability, so we present some of the major natural phenomena affecting the stability, namely:

- occurrence of transverse circulation;
- aeration flow;
- occurrence of standing waves;
- occurrence of waves with increasing amplitude.

To describe the motion of an incompressible fluid in a pseudo prismatic channel with the vertical plane of symmetry using the following system of equations:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{1}{F} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\alpha}{g} \frac{QB}{F^2} \frac{\partial H}{\partial t} + (1 - \alpha) \frac{Q^2 B}{F^3 g} \frac{\partial H}{\partial x} + \alpha \frac{Q}{F^2 g} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{iK^2 - Q^2}{K^2}$$

where Q - flow rate, F - cross-sectional area, B - width of the channel, H - depth, $K = CF\sqrt{R}$ - the capacity of the channel, i - the angle of the midline of the channel bottom to the x-axis, α - parameter adjustments of movement

That in result of unperturbed established uniform motion is constant:

$$Q = Q_0, \quad H = H_0, \quad B = B_0, \quad F = F_0, \quad K = K_0.$$

As a result of perturbations:

$$H = H_0 + \Delta H; \quad Q = Q_0 + \Delta Q; \quad K = K_0 + \Delta K; \quad F = F_0 + B_0 \Delta H. \quad (2)$$

where H_0, Q_0, K_0, F_0 - constant values that are stored H, Q, K, F in a uniform flow.

$$\text{Denote } u = \frac{\Delta Q}{Q_0}; \quad h = \frac{B_0 \Delta H}{F_0}, \text{ then}$$

$$\sqrt{\frac{Q_0^2 B_0}{F_0^3 g}} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0;$$

$$\sqrt{\frac{Q_0^2 B_0}{F_0^3 g}} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \alpha \sqrt{\frac{Q_0^2 B_0}{F_0^3 g}} \frac{\partial h}{\partial \tau} + (1 - \alpha \frac{Q_0^2 B_0}{F_0^3 g}) \frac{\partial h}{\partial s} + \alpha \frac{Q_0^2 B_0}{F_0^3 g} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{2Q_0^2 \Delta K}{K_0^2 K_0} - \frac{2Q_0 \Delta Q}{K_0^2}.$$

To simplify omit the index zero at B, F, Q, K .

Let $\lambda = \sqrt{\frac{Q^2 B}{F^3 g}}$; $\mu = \frac{\Delta K F}{B K \Delta H}$; $i = \frac{Q^2}{K^2}$, then

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \tau} - \alpha \lambda \frac{\partial h}{\partial \tau} + (1 - \alpha \lambda^2) \frac{\partial h}{\partial s} + \alpha \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial s} = 2i(\mu h - u)$$
(3)

Theorem 1. Let

$$\mu > 0, \alpha \lambda^2 > 1$$

then the system (1) is stable if the following condition holds:

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha.$$
(4)

Note that in [2], condition (4), first considered as necessary and sufficient condition for S-stability with respect to small perturbations, which takes into account the forces that affect the change in free surface flow. But then it was proved that this condition is only a necessary condition for S-sustainability. This criterion with $\alpha = 1$ was independently obtained by two authors V. Vedernikov and Y. Iwasa [1]. This criterion with $\alpha = 1$ in (4) becomes the following condition:

$$\frac{1}{\lambda} > \mu - 1.$$
(5)

Thus, having the condition (4) for the stability of channel flow we confirmed the correctness of the mathematical formulation (1) for the formulation of the problem of motion of water flow in the pseudo prismatic channel.

1. Iwasa Y. The criterion for instability of steady uniform flows in open channels.// Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., 16, No 4, 1954. - P. 811 – 817.

2. Картвелишвили Н.А. Неустановившиеся открытые потоки. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 126 с.

**SECTORIAL QUALIFICATIONS FRAMEWORKS IN INFORMATICS.
PROBLEMS OF DEVELOPMENT AND ADAPTATION IN THE
EDUCATIONAL SYSTEM OF UKRAINE.**

Europe's route to lasting economic recovery and social cohesion is knowledge, skills and competences. Only on this basis can we encourage the intensified innovation and entrepreneurship needed in the coming years.

Despite the recession, latest analysis of skill demand and supply forecast up to 2020 held by European Centre for the Development of Vocational Training, in line with earlier projections, says that in Europe many of the 80 million job openings will be in services and in technical and professional occupations. This requires highly qualified employees and especially medium vocational education and training qualifications [1]. Highlighted by Europe 2020, these are the challenges for National academic systems and Universities. High employment rates require modern labour markets with highly skilled workers who can access the learning they need, whatever its type or level, at any time throughout their working life to update and broaden their skills. Efficient labour markets must provide mobility for working and learning among students, apprentices, young professionals, adults and older workers. Improving research and development requires more emphasis on creativity and innovation, knowledge partnerships between education, business and research, as well as graduates in maths, science and engineering. However, Universities cannot do this alone. It must be part of a package of policy measures.

The European Qualifications Framework (EQF) was introduced in 2008 as a 'meta-framework' or common reference point for National Qualifications Frameworks (NQF) in Europe, a function for which, with some caveats, it has been highly successful. It has also been used with some success to support the development or referencing of Sectoral Qualifications Frameworks (SQF), although questions remain about how these interlink with national frameworks.

In Ukraine National Qualification Framework designed on the basis European Qualification Framework as the description of qualifying degrees, which is classified and structured by competence. It is developed for using by executive authorities, that implement state policy in education field, field of employment, social and labor relations; schools, employers, natural and legal persons to develop, identify, correlate, recognize, plan and progress qualifications.

Ukrainian National Qualifications Framework is being implemented to

- enact European educational quality assurance standards and principles considering labor market requirements for the workers competence;
- harmonize laws and regulations in the field of education, social and labor relations;
- promote national and international recognition for qualifications, gained in Ukraine;
- establish effective interaction of education service and work market scopes.

The relationship between Sectoral Qualification Frameworks and the EQF is in some respects analogous to that between the latter and national qualifications frameworks, with some frameworks being effectively sectoral interpretations of the EQF, while others have been developed independently of it and then mapped to it.

Also note that Ukraine condition of development Sectoral Qualification Framework is unique because in our country competence approach began to be realized years ago as the educational qualification characteristics (Speciality Frameworks or Standarts).



We also have to underline the importance of the sectoral approach in terms of recognition of studies, curriculum development and quality assurance and enhancement and also its capability to act as a coordinated force in more political terms.

Currently more and more countries use Learning Outcomes (LO) for qualifications frameworks, standards, curricula and assessment. Broad agreement is that LO provides increase transparency and strengthens accountability; introduce a common language enabling comparison of qualifications.

It should be noted the fact that the development of Sectoral Qualifications Frameworks in Informatics should use known National Occupational Standards and European e-Competence Framework (e-CF), that provides a reference of 40 competences as required and applied at the Information and Communication Technology (ICT) workplace, using a common language for competences, skills and proficiency levels that can be understood across Europe.

1. European Commission. *Key competences for a changing world, Draft 2010 joint progress report of the Council and the Commission on the implementation of the "Education & Training 2010 work programme"*, Communication, COM (2009) 640/3 http://www.europolitics.info/pdf/gratuit_en/261594-en-1.pdf [cited 04.12.2009]

DEFORMATION OF THIN THERMOELASTIC SHELLS COMPLIANT TO SHEAR AND COMPRESSION

Behavior of the thin-walled structures under the fluency of heat and force is considered in this paper. One of the approaches to design of these structures there is an adequate transition to simplified models of calculation of thin-walled cells based on the theory of plates and shells [2, 3].

Let us the body thickness $h = \text{const} > 0$ is substantially smaller compared to other dimensions the elastic body:

$$D := \{\mathbf{r} = (\mathbf{a}, \alpha_3) \in \check{Y}^3 : \mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \alpha_3 \in (-\frac{1}{2}h, +\frac{1}{2}h)\},$$

where $\Omega = \{\mathbf{r} = (\mathbf{a}, 0) \in D\}$ is mid-surface of the shell, $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ is curvilinear orthogonal coordinate system.

In the paper we use approximation of the displacement vector with respect to its thickness variable α_3 based on the Timoshenko–Mindlin kinematic hypotheses, with saved the full vector of rotations of a normal to the mid-surface Ω .

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{s}_1(\mathbf{a}, t) + \alpha_3 \mathbf{s}_2(\mathbf{a}, t) + O(h^2), \quad \forall (\mathbf{a}, \alpha_3) \in D. \quad (1)$$

Here $\mathbf{u} = \mathbf{s}_1(\mathbf{a}, t) = \mathbf{U}((\mathbf{a}, 0), t)$ is the displacement vector of mid-surface, and $\mathbf{s}_2(\mathbf{a}, t)$ is the rotation angles of a normal vector to mid-surface

$$\mathbf{s}_2(\mathbf{a}, t) = \partial_3 \mathbf{U}((\mathbf{a}, 0), t) \equiv \partial \mathbf{U}((\mathbf{a}, 0), t) / \partial \alpha_3.$$

Similarly to displacements we approximate temperature

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_1(\mathbf{a}, t) + \alpha_3 \theta_2(\mathbf{a}, t) + O(h^2), \quad \forall (\mathbf{a}, \alpha_3) \in D. \quad (2)$$

The vector $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{a}, t), \mathbf{s}_2(\mathbf{a}, t))$ and vector $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\mathbf{a}, t), \theta_2(\mathbf{a}, t))$ is the solution of the following semi-discretized variational problem of thermoelasticity:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{given } \mathbf{s}_0, \mathbf{v}_0 \in W_h, \boldsymbol{\theta}_0 \in Z^2; \\ \text{find } \{\mathbf{s}(t), \boldsymbol{\theta}(t)\} \in L^2(0, T; W_h \times Q_h) \text{ such that} \\ m_\Omega(\mathbf{s}''(t), \mathbf{v}) + c_\Omega(\mathbf{s}(t), \mathbf{v}) - b_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{v}) = m_\Omega(\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) - \langle l_{s_\Omega}(t), \mathbf{v} \rangle, \\ c_\varepsilon s_\Omega(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) + \kappa_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) \\ \quad + b_\Omega(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}'(t)) = s_\Omega(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\xi}) - \langle l_{c_\Omega}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m_\Omega(\mathbf{s}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c_\Omega(\mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in W_h, \\ s_\Omega(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in Q_h. \end{array} \right. \quad (3)$$

Here W_h, Q_h – the spaces of admissible displacements and temperatures

$$\begin{cases} Z = L^2(\Omega), \mathbf{H} = Z^3, \\ W_h = \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^6 : \mathbf{w} = 0 \text{ on } S_u\}, Q_h = \{\xi \in [H^1(\Omega)]^2 : \xi = 0 \text{ on } S_\theta\}. \end{cases} \quad (4)$$

For details and design problem (4) see in the paper [1].

The problem (4) is solving by finite element method (FEM). Numerical results are present in the case of the one-dimension quasi-static problem of thermo-elastic disk-plate. The following values of the dimensionless parameters were used in calculations: radius of the disk $R=10$, it's thickness $h=0.5$, Poisson's ratio $\nu = 0.22$, Young's modulus $E = 1$, heat transfer coefficient $\alpha_T = 1.0$. The boundary of the disc $\alpha_1 = R$ is free from external loadings. The values of stress σ_{11}, σ_{22} along the radius $\alpha_1 \in (0, R]$ (computed by FEM) next to the known analytical solution at these same points are shown in fig.1.

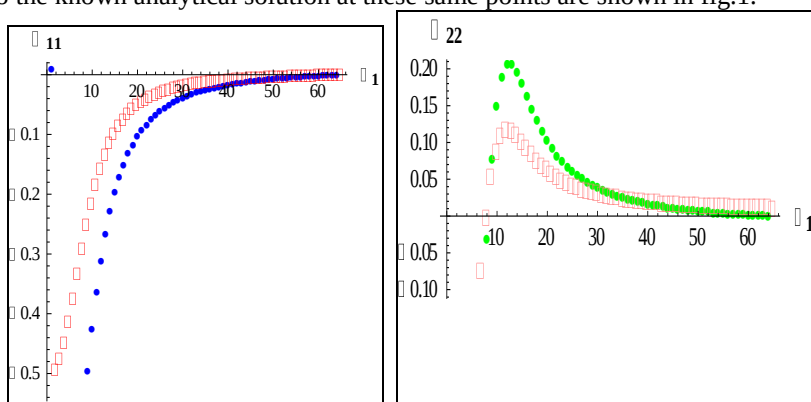


Fig.1. – Stresses of a disk-plate: a) • – analytical; Δ – numerical solution.

Thus we have demonstrated application of linear thermoelasticity theory and the linear approximations of displacements according to the thickness variable to construct numerical schema of modeling thin flexibility shells under fluency of heat.

1. Вагін П. Побудова варіаційної задачі нестационарної термопружності тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення / П. Вагін, Р. Малець, Г. Шинкаренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014.
2. Коваленко А.Д. Термопружність / А.Д. Коваленко. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
3. Подстригач Я.С. Термопружність тонких оболонок / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швець. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с.

COMPUTABLE DOUBLE-SIDED A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS

We present the technique for obtaining double-sided a posteriori error estimates of the finite element (FE) approximations for singular perturbed and/or nonlinear boundary value problems of the following kind

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + (\beta_1, \beta_2) \cdot \nabla u + \sigma u = f[u] & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

At first we obtain the piecewise linear FE approximation $u_h \in V_h \subset V$ of the solution to (1) on the mesh $\mathfrak{T}_h = \{K\}$ using the techniques described in [1]. Then we formulate a posteriori error estimator (AEE) problem in the subspace $E_h \subset E$, $V = E \oplus V_h$ with the orthogonal basis $\{\phi_K\}_{K \in \mathfrak{T}_h}$ and obtain the estimator $e_K \in E_h$ on each K in the following form $e_K(x, y) = \lambda_K \phi_K(x, y)$, $\lambda_K \in \mathbb{R}$. For each K we define both $\phi_K \equiv \phi_K^{Dir} := 27 L_1 L_2 L_3$ for the Dirichlet error estimator and $\phi_K \equiv \phi_K^{Neu} := 3[L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1]$ for the Neumann error estimator in barycentric coordinates, for details see [1]. Dirichlet and Neumann error estimators provide double-sided error estimates for the problem (1).

As an example we consider the singularly perturbed problem (1) with the solution $u(x, y) = G[m\beta_1(x) + v\beta_2(y)]G[m\beta_2(y) - v\beta_1(x)]$, $m = \cos(\pi/6)$, $v = \sin(\pi/6)$, $G(z) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(z/\sqrt{2\mu})]$ and $\mu = 10^{-4}$, $\beta_1(x) = x - 0.6$, $\beta_2(y) = y - 0.3$, $\sigma = f = 0$, $g = u|_{\partial\Omega}$. The obtained numerical results are described in the Tables 1 and 2, where $\operatorname{Card} \mathfrak{T}_h$ denotes the number of finite elements in the mesh, $\operatorname{Nod} \mathfrak{T}_h$ the number of nodes in the mesh, $\varepsilon := \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ the exact relative error, $\varepsilon_h := \|e_h\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ the relative error estimation, $e_h = \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} e_K$ a posteriori error estimator, $\kappa := \|e_h\|_{1,\Omega} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^{-1}$ the efficiency index of a posteriori error estimator and $p := 2 \ln(\|e_h^k\| \|e_h^{k+1}\|^{-1}) / (\ln(N_{k+1} N_k^{-1}))^{-1}$ the convergence rate of the estimator. Table 1. The convergence of the FE approximations on the uniform meshes

k	$\operatorname{Nod} \mathfrak{T}_h$	$\operatorname{Card} \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	1 301	2500	98.498	81.905	99.747	7.2	17.6	-	-

2	5 101	10 000	90.447	47.445	99.019	4.5	15.1	1.5	1.0
3	2 0201	40 000	32.963	17.020	79.247	2.0	7.6	2.6	2.5
4	8 0401	160 000	5.651	7.195	21.205	0.8	3.0	2.6	2.6
5	320 801	640 000	1.785	3.542	6.882	0.5	1.9	1.7	1.7
6	1 281 601	2 560 000	0.751	1.770	2.907	0.4	1.6	1.3	1.3

Table 2. The convergence of the adaptive FE approximations for 1% precision

$Nod \mathfrak{I}_h^{Dir}$	p^{Dir}	ε_h^{Dir}	ε^{Dir}	k	ε^{Neu}	ε_h^{Neu}	p^{Neu}	$Nod \mathfrak{I}_h^{Neu}$
1 301	-	98.498	81.905	1	81.905	99.747	-	1 301
2 301	0.8	97.446	72.312	2	72.312	99.699	0.2	2 301
3 563	3.4	90.447	47.447	3	47.447	99.019	2.9	3 568
5 189	3.6	73.500	30.875	4	30.875	96.843	3.2	5 206
7 178	7.0	32.963	17.023	5	17.023	79.247	6.5	7 274
9 465	5.9	15.213	11.736	6	11.735	50.443	5.2	9 854
12 758	6.6	5.655	7.200	7	7.196	21.207	6.0	13 641
18 803	2.3	3.647	5.623	8	5.610	13.922	2.1	20 714
29 523	3.1	1.798	3.564	9	3.543	6.885	2.9	33 839
47 737	1.5	1.262	2.851	10	2.801	4.806	1.3	58 119
78 422	1.8	0.800	1.893	11	1.775	2.915	1.7	103 758

Tables 1, 2 confirm that the Dirichlet and Neumann estimators give the double-sided error estimates and this conclusion is valid for both uniform and adaptive meshes. Table 2 shows that using Neumann estimator in an adaptation criterion requires more nodes of a refined mesh than Dirichlet estimator to achieve a required error tolerance. It is the direct consequence of the above mentioned double-sided error estimates.

We can improve the adaptation process by using certain combination of Dirichlet and Neumann estimators for more precise a posteriori error estimation.

The efficiency index κ is in close neighborhood of 1.0 which means that AEEs calculate the approximation error with a good precision.

1. Ostapov O.Yu., Shynkarenko H.A. and Vovk O.V. Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems. Manufacturing Processes. Actual Problems-2013. M. Gajek, O. Hachkewych, A. Stanik-Besler eds. PolitechnikaOpolska, Opole. – 2013. – Vol. 1. Basic science applications. – P. 31–46.

MULTISCALE MODELING OF DEFORMATION PROCESSES FOR THE BODIES WITH THIN COVERS AND INCLUSIONS

A lot of bodies that occur in nature or engineering contain heterogeneities like materials with thin covers, inclusions or composite structures. Analysis of these is of great importance in models of structural mechanics [1, 2, 4]. Since such bodies are heterogeneous, it is reasonable to model the arising physical phenomena using multiscale models and solve such problems by coupling different algorithms. In our work, we consider several problems for which we apply finite element method (FEM) and boundary element method (BEM) coupled by domain decomposition algorithms.

In our work, we formulate a model for the description of the deformation processes inside the body with thin inclusion or cover. For this purpose inside the main body, linear stress theory is assumed and formulated using boundary integral equations [1, 2]. Inside the thin part we use the equations of Timoshenko theory of shells [1].

For such problems to be well-posed, adequate transmission conditions should be applied. In our case, continuity of the displacements and respective stresses through the interfaces common to both domains must hold.

To solve these problems numerically, we use BEM to solve the boundary integral equations [1]; inside the shell we solve the boundary value problem using FEM with bubble functions, since it gives good approximation even for small shell thicknesses; finally these two methods are coupled using domain decomposition techniques described in [3]. More specifically, Dirichlet-Neumann scheme is formulated.

The advantage of our approach in comparison with standard approach that uses linear elasticity theory in the whole structure is that in our approach the dimension of the problem in both parts is decreased which results in the smaller number of the degrees of freedom.

However, in some cases for the body with cover our approach doesn't seem to be beneficial.

We have proven the existence and uniqueness of solution of corresponding problems and for various physical structures. Moreover, we have shown that such algorithm converges for a suitable choice of relaxation parameter θ . This relaxation parameter is typically chosen empirically.

We give two examples and show the numerical results in the cases of the body with covers without imposed Dirichlet boundary conditions on the cover (see Fig. 1). We vary body dimensions and other physical properties in our examples.

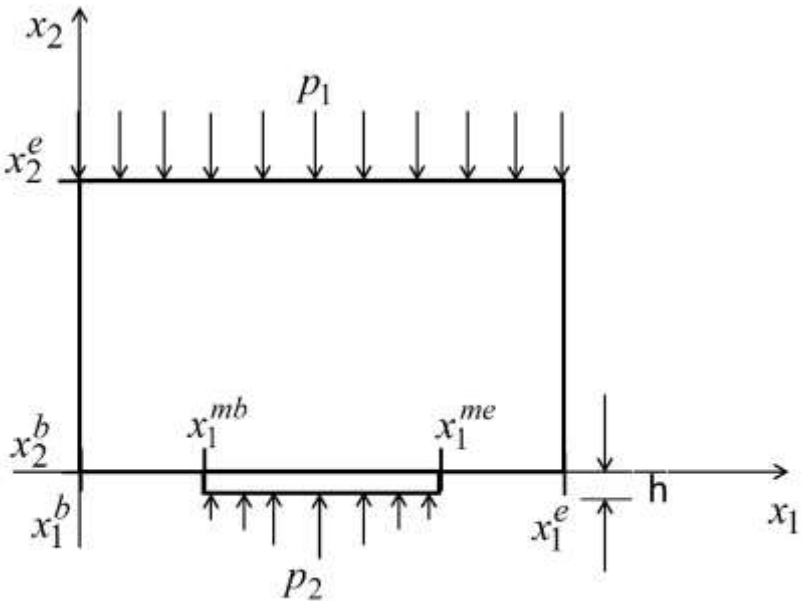


Fig. 1. Example of a body with cover

The results of the numerical experiments were compared and are consistent with the results obtained using package for mathematical modeling and simulation COMSOL.

1. Dyyak I. Numerical investigation of a plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition / I. Dyyak, Ya. Savula, A. Styahar // Journal of numerical and applied mathematics. – 2012. – №3 (109). – Pp. 23–33.
2. Savula Ya. Numerical simulation of the bodies with thin covers and inclusions using FEM/BEM coupling with domain decomposition algorithm / Ya. Savula, A. Styahar // INTERPOR – Lviv, 2012. – Pp. 105-106.
3. Quarteroni A., Valli A. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford, 1999. — 363 p.
4. Vynnytska L.I. Mathematical modeling of the deformation process for the bodies with thin soft inclusions. — Lviv, 2009. — 153 p (in Ukrainian).

ON THE TWO-STEP TWO-PARAMETRIC SECANT TYPE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

We consider the problem of finding the approximation solution x_* of a nonlinear equation

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

where operator F is defined on a convex domain D of a Banach space X with values in a Banach space Y .

In work [1], we propose the two-step two-parametric secant type method

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F(u_n; v_n)]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [F(u_n; v_n)]^{-1} F(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

where $F(u_n; v_n)$ is the first order divided difference for the operator F on the points u_n and v_n , $u_n = x_n + a_n(y_n - x_n)$, $v_n = x_n + b_n(y_n - x_n)$, $a_n \in [-1; 1]$, $b_n \in [0; 1]$. Particular cases of the method (2) are well-known methods, including two-step methods with convergence orders $1 + \sqrt{2}$ [2, 3] and classical Newton's method.

We provide a local and a semilocal convergence analysis for method (2) under the generalized Lipschitz conditions for the first order divided differences, which are weaker than the classical Lipschitz conditions. It is established that the convergence order is quadratic in generally case and in the case of parameters $a_n = O(\|y_n - x_*\|)$ and $b_n = 1$ convergence order is $1 + \sqrt{2}$. To study the semilocal convergence of the method (2) we use Kantorovich's majorants principle. The numerical experiments show advantages over the corresponding one-step methods in terms of the computational cost.

1. *Shakhno S.* Two-parametric secant type methods for solving nonlinear equations / S. Shakhno, S. Grab, H. Yarmola // Visnyk Lviv Univ. Ser. Appl. Math. Comp. Sci.— 2009.— №15.— P. 117–127. (in Ukrainian)

2. *Shakhno S.M.* On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations / S.M. Shakhno // J. Comp. Appl. Math.— 2009.— 231.— P. 222–235.

3. *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1 + \sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung / W. Werner // Numer. Math.— 1979.— 32.— P. 333–342.

V. Stelmashchuk*, H. Shynkarenko***

(* Ivan Franko Lviv National University,

** Politechnika Opolska)

ADAPTIVE FINITE ELEMENT MODELING OF PYROELECTRICITY FORCED VIBRATION PROBLEM

Pyroelectrics and piezoelectrics belong to so-called “smart materials”, which are widely utilized in modern devices, namely various sensors, actuators, gauges. This fact demonstrates the practical relevance of researches in this area. A computer simulation allows us to assess and analyze pyroelectric behavior under different circumstances. Moreover, it would be very convenient to be sure that our obtained solution is more or less correct with some preset level of accuracy. Therefore, our purpose is to build a numerical scheme, based on adaptive FEM, which solves pyroelectricity forced vibration problem.

In our research we use linear mathematical model of pyroelectricity phenomenon borrowed from works [3, 4] and formulate initial boundary value problem in accordance with papers [1, 2]. This model assumes, that pyroelectric behaviour is sufficiently described by elastic displacement vector $\mathbf{u} = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^n$, electric potential $p = p(x, t)$ and temperature change $\theta = \theta(x, t)$, which satisfy the system of interconnected partial differential equations of motion, electrodynamics and heat conduction. Forced vibration problem is a special case of the above problem, when all the loadings, applied to pyroelectric, are harmonic with some frequency $\omega = \text{const} > 0$. In this case, the unknowns are also assumed to be harmonic, that is $u_i(x, t) = u_{i1} \cos \omega t + u_{i2} \sin \omega t, i = 1, \dots, n$, $p(x, t) = p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t$ and $\theta(x, t) = \theta_1 \cos \omega t + \theta_2 \sin \omega t$.

Our approach for solving this problem, mentioned below, finally results in the following numerical scheme:

find $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ such that

$$\begin{bmatrix} \omega \mathbf{A} & -[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] & 0 & \mathbf{E}^T & 0 & \mathbf{Y}^T \\ [-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] & \omega \mathbf{A} & -\mathbf{E}^T & 0 & -\mathbf{Y}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{E} & \omega^{-1} \mathbf{Z} & \mathfrak{D} & 0 & \boldsymbol{\Pi}^T \\ -\mathbf{E} & 0 & -\mathfrak{D} & \omega^{-1} \mathbf{Z} & -\boldsymbol{\Pi}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{Y} & 0 & \boldsymbol{\Pi} & \omega^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{Y} & 0 & \boldsymbol{\Pi} & 0 & -\mathbf{S} & \omega^{-1} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_1 \\ \omega^{-1} \mathbf{R}_1 \\ \omega^{-1} \mathbf{R}_2 \\ \omega^{-1} \mathbf{F}_1 \\ \omega^{-1} \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

The scheme (1) is obtained after formulation of the corresponding variational problem, separation of variables and applying standard Galerkin-discretization by spatial variable. Here the unknowns $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ are nodal values of amplitudes of elastic displacement, electric potential and temperature change.

Finally, a posteriori error estimator of FEM-approximations, which allow us to assess the accuracy of solution, has been build and the corresponding h-adaptive FEM-scheme has been constructed.

Consider the following numerical experiment. PZT-4 pyroelectric bar with length $L = 0.01m$ is loaded on the right edge with harmonic mechanical pressure $\sigma_1 = 5 \cdot 10^6 N / m^2$ and frequency $\omega = 3 \cdot 10^6 Hz$. The left edge is fixed, grounded and with stable temperature. We start with the uniform mesh of $N = 20$ finite elements with piecewise-linear approximations of solution. A posteriori error estimator uses quadratic bubble-function. Our purpose is to find solution with the preset accuracy of 1%. In this case it took 6 iterations of adaptation process to achieve this goal. Fig. 1 shows how finite elements quantity increases during h-adaptation process. Fig.2 demonstrates the relative error dynamics.

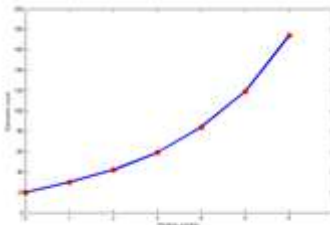


Fig.1. Finite elements quantity

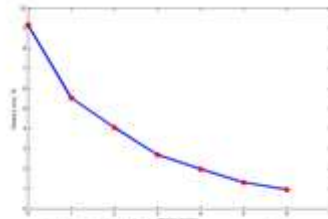


Fig.2. Relative error, %

1. Шинкаренко Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний / Г.А. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – Т.29, №.7, 1993. – С. 1252-1260.

2. Chaban F. Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectric. / F. Chaban, H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk, S. Rosinska // Manufacturing processes. Some problems. Opole: Politechnika Opolska, 2012. – Vol.1, Ch.9. – p.107- 118.

3. Tichy J. Fundamentals of Piezoelectric Sensorics. Mechanical, Dielectric and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials / J. Tichy, J. Erhart, E. Kittinger, J. Privratska. – Berlin: Springer, 2010. –216p.

4. Yang J. The Mechanics of Piezoelectric Structures / J. Yang. –Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd. 2006. – 312p.

V. Trushevskyy*, H. Shynkarenko***, N. Shcherbyna**

(*Ivan Franko National University of Lviv,

**Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS Ukraine,

***Politechnika Opolska)

USE OF RADIAL BASIS FUNCTION NEURAL NETWORKS FOR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Basically it is not possible to get analytical exact solutions of mathematical physics problems in practice. Therefore the numerical methods are used in order to solve problems of this class, which usually requires a lot of computational resources and allows only a sequential computing. Obvious that optimal usage of modern computer resources should be organized by a concurrent computing. In many cases the concurrent computing can be effectively achieved by using artificial neural networks (ANN).

At the moment it is possible to single out three main directions of ANN for solving of boundary value problems: Radial Basis Function (RBF) neural networks [1, 5], Feed-Forward neural networks [2, 3, 5], Cellular neural networks [4].

In this paper we are going to consider the RBF neural network [1] for solving of elliptic boundary value problem. The object of our investigation is a boundary value problem which is described as follows:

$$\begin{cases} \text{find } u = u(x) \text{ such that} \\ -\nabla \cdot [\lambda \nabla u] = f \text{ in } \Omega \subset R^2, \\ u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u \subset \Gamma, \text{ mes } \Gamma_u > 0, \\ -n \cdot [\lambda \nabla u] = \alpha[u - u_c] \text{ on } \Gamma_q, \alpha = \text{const}, \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_u. \end{cases} \quad (1)$$

Let us to formulate the variation problem of problem (1) with penalty:

$$\begin{cases} \text{given } \sigma = \text{const} > 0; \\ \text{find } u \in V := H^1(\Omega) \text{ such that} \\ F_\sigma(u) \leq F_\sigma(v) \forall v \in V, \end{cases} \quad (2)$$

where

$$\begin{cases} F_\sigma(v) := \frac{1}{2} a_\Omega(v, v) - \langle l_\Omega, v \rangle + \sigma \|u - \bar{u}\|_{0, \Gamma_u}^2, \\ a_\Omega(u, v) := \iint_\Omega \lambda \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u v d\gamma, \\ \langle l_\Omega, v \rangle := \iint_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_q} (-\alpha u_c) v d\gamma \quad \forall u, v \in V. \end{cases}$$

We will use the RBF approximation for the solution of (1):

$$u(x) \cong u_N(x) := \sum_{i=1}^N w_i \phi_i(x) = \sum_{i=1}^N w_i \exp[-r_i^2(x) a_i^{-2}], \quad (3)$$

where $r_i^2(x) = r_i^2(x_1, x_2) = (x_1 - c_{1i})^2 + (x_2 - c_{2i})^2$ and $\eta, \beta, \gamma \in R$ are coefficients of ANN learning.

The aim of RBF neural network is to minimize the cost function $F(v)$ (solution of the variation problem (2)) by using ANN training algorithm to optimize weights w_i , RBF centers (c_{1i}, c_{2i}) and widths a_i :

$$w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} - \eta \frac{\partial F(c_i^{(k-1)}, a_i^{(k-1)}, w_i^{(k-1)})}{\partial w_i^{(k-1)}}, \quad a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - \gamma \frac{\partial F(c_i^{(k)}, a_i^{(k-1)}, w_i^{(k)})}{\partial a_i^{(k-1)}}.$$

$$c_{ji}^{(k)} = c_{ji}^{(k-1)} - \beta \frac{\partial F(c_{ji}^{(k-1)}, a_i^{(k-1)}, w_i^{(k)})}{\partial c_{ji}^{(k-1)}}, \quad j = 1, 2.$$

As an example we consider problem (1) with the following data: $\lambda=1$, $\bar{u} = 0$, $\alpha=10^4$, $\eta = \beta = \gamma = 10^{-4}$, $f(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ and exact solution: $u = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$. Calculations were done by using different numbers of RBF: $N_1=25$ and $N_2=36$. In order to analyze the convergence of approximation to exact solution, we obtained the convergence measure:

$$P = (\ln \|u - u_{N_1}\| - \ln \|u - u_{N_2}\|) (\ln N_2 - \ln N_1)^{-1} \approx 1.64.$$

The numerical solution was calculated with a following relative error:

$$\varepsilon = \|u - u_{N_1}\| \cdot \|u\|^{-1} \cdot 100\% \approx 0.0085\%.$$

Proposed RBF approach allows obtaining solutions with a high accuracy.

1. *Jianyu L.* Numerical solution of elliptic partial differential equation using radial basis function neural networks / L. Jianyu, L. Siwei, Q. Yingjiana // *Neural Networks*. – 2003. – 16(5/6). – P. 729 – 734.

2. *Lagaris I.E.* Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations / I.E. Lagaris, A. Likas, D.I. Fotiadis // *IEEE Trans. on Neural Networks*. – 1998. – V. 4. – P. 987–1000.

3. *Mohsen H.* Feedforward Neurual Network for Solving Partial Differential Equation / H. Mohsen, K. Behnam // *Journal of Applied Sciences*. – 2007. – 7(19). – P. 2812–2817.

4. *Novatorsky M.* Artificial neural networks: calculations / M. Novatorsky, B. Nesterenko // *Works of Mathematics Institute NAS of Ukraine*, Vol. 51, 2004. – 408p. (in Ukrainian)

5. *Haykin S.* *Neural Networks: A comprehensive foundation*, Prentice-Hall, New Jersey, 1999. – 842 p.

MATHEMATICAL MODELING PROBLEM OF FULL FLOW FOR SURFACE AND GROUNDWATER

Formulate the first equation of the flow over the surface watershed, taking into account boundary and initial conditions. Then write the equation of motion of underground flow model of fluid [1, 2]. Given a continuous uniform medium water flow will formulate the initial boundary value problem in common of the fluid on the surface watershed.

We select in the continuum (fluid) moving layer $S(t) \in \mathbb{R}^3$.

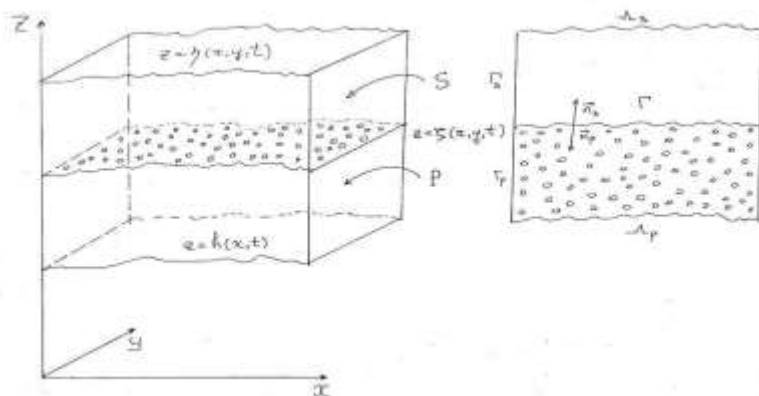


Figure 1. General view of the model flows and cross-section.

In practice, often using the boundary conditions more general form. These boundary conditions are mixed, when parts of the boundary of S define the components of the vector velocity and surface tension:

$$\vec{u}_i = \vec{\hat{u}}_i \text{ on } \Gamma_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \nu_j = \hat{p}_i, \text{ on } \Gamma_2, i = 1, 2, 3,$$

where $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial S$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ - external unit vector normal to ∂S ; $\vec{\hat{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ - given vector function.

Given continuity environments, we write the terms of the behavior of moisture on the common boundary Γ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn}(u, p_s) &= p_p \\
\sigma_{\pi\pi} &= \mathbf{O} \\
u_n &= -v_n
\end{aligned} \tag{1}$$

The formulation the initial-boundary interaction of surface and underground flows.

Denote

$$\tilde{\psi} = \psi \cdot \rho \cdot g, \quad \tilde{\rho} = \frac{m \rho \cdot g}{n_v}.$$

Then write the following tasks:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Find } \{u, p, \varphi\} \in V \times Q \times W, \\
I) \quad M(\rho; u', \xi) + N(u; u, \xi) + A(p, \xi) + C(\mu; u, \xi) \\
\quad + Y(p, \xi) = \langle \mathfrak{I}_1, \xi \rangle, \forall \xi \in V \\
II) \quad B(\rho; u, \theta) + Y(\theta, u) = \langle \mathfrak{I}_2, \theta \rangle, \forall \theta \in Q \\
III) \quad M(\tilde{\rho}; \varphi', \psi) + A(\tilde{\psi}, \psi) + Y(\tilde{\psi}, \psi) = \langle \mathfrak{I}_3, \psi \rangle, \forall \psi \in W
\end{array} \right.$$

Calculate, given the initial conditions and the boundary condition (1), iteration variables u and p from the ratio I) and II). More from matching conditions and boundary conditions is calculated from the III) iteration variable φ .

1. *Discacciati M., Miglio E., Quarteroni A.* Mathenatical and numerical models for coupling surface and roundwater flows//Applied Numerical Mathematics. – N.43, 2002. – P. 57-74.

2. *Venherskyi P.* Numerical investigation problems of coupled movement of surface and underground flows/ Venherskyi P. // XXI International Conference “Problems of decision making under uncertainties” . – Skhidnytsia, May 13-17, 2013. – P. 64-66.

ПОВНА СИСТЕМА ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ ПРОСТОГО ГРАФА ІЗ 5 ВЕРШИН.

Класичною відкритою задачею теорії графів є задача ізоморфізму графів, тобто знаходження ефективного алгоритму для визначення того чи два графи є ізоморфними. Проте, до цього часу невідомо, чи ця задача належить класу Р. Одним із можливих підходів до вирішення цієї проблеми, є залучення алгебраїчних методів і побудова повної поліноміальної системи інваріантів. Позначимо через e_{ij} простий граф із ребром, що з'єднує вершини i, j , а через x_{ij} e_{ij} відмічений граф із єдиним ребром $\{i, j\}$. Тоді множина всіх графів із n вершин утворює векторний простір V_n із базисом e_{ij} розмірності C_2^n . Симетрична група S_n діє на V_n стандартним способом: $g e_{ij} = e_{g(i)g(j)}$, де g довільна перестановка з S_n . Ця дія індукує мономорфне вкладення групи S_n групи перестановок на C_2^n елементах яко позначається $S_n^{(2)}$. Відповідна алгебра інваріантів цієї групи позначається через $k[V_n]^{S_n^{(2)}}$.

Відомо [1], що два графи ізоморфні, тоді і тільки тоді коли їхні алгебри інваріантів співпадають. Для випадку графа на $n=4$ вершинах алгебра інваріантів побудова в [2]. При $n=5$ в [3] знайдена алгебра інваріантів непростого графа, яка складається із 57 породжуючих елементів. Нами доведено, що при $n=5$ для простого графа існує мінімальна породжуюча система алгебри інваріантів, яка складається із 5 породжуючих елементів. Має місце теорема:

Теорема. *Повна система інваріантів простого графа при $n=5$ складається із наступних 5 многочленів $R(x_1)$, $R(x_1 x_{10})$, $R(x_1 x_2 x_5)$, $R(x_1 x_2 x_3)$, $R(x_1 x_2 x_3 x_9)$, де R - оператор Рейнольдса усереднення по групі .*

1. Harary, Frank and Edgar M. Palmer, Graphical Enumeration. Academic Press, New York, NY, 271 p., 1973

2. Helmer Aslaksen, Shih-Ping Chan, Tor Gulliksen, Invariants of S_4 and the Shape of Sets of Vectors, Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. 7, No.1, 53-57 (1996).

3. Nicolas Thiery, Algebraic invariants of graphs; a study based on computer exploration, SIGSAM Bulletin (ACM Special Interest Group on Symbolic and Algebraic Manipulation), 34(3): 9-20, September 2000

ДЕФОРМУВАННЯ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

В інженерній практиці для розрахунку напружено-деформівного стану оболонкових конструкцій, головним чином, використовують математичні моделі тонких оболонок, що ґрунтуються на класичних гіпотезах Кірхгофа-Лява та Тимошенка-Міндліна (п'ятимодальний варіант). Однак, широкого розповсюдження набули уточнені математичні моделі оболонок, що враховують поперечні лінійні та зсувні деформації.

Підходи до розрахунків оболонкових конструкцій на даний момент в основному базуються на чисельних методах, заснованих, зокрема, на варіаційних постановках розглядуваних задач.

Записано ключові рівняння теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення (шестимодальний варіант), для визначення напружено-деформованого стану оболонки з використанням співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок [1]. Сформульовано варіаційне формулювання задачі нелінійної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення [2].

Розв'язування варіаційної задачі здійснюється методом скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу. Обчислювальні аспекти методу скінченних елементів наведено у праці [3].

Отримано числові розв'язки задач про деформування пластини-смуги та катеноїда на основі розглядуваної теорії. Проведено порівняння цих розв'язків із розв'язками, побудованими на основі теорій оболонок Кірхгофа-Лява та Тимошенка-Міндліна (п'ятимодальний варіант) [1].

1. *Бернакевич І.Є.* Нелінійне деформування тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення / Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шот І.Я. // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип.11. – С. 174-182.

2. *Bernakevych I.E., Vahin P.P., Shot I.Ya.* A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505.

3. *Шот І.Я.* Чисельне розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. Т 18, вип. 1 (17). – С. 132–141.

ПОБУДОВА ТА ВИКОРИСТАННЯ ЗБАГАЧЕНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Одним із класів числових методів для розв'язання крайових задач є клас безсіткових методів. Маючи явну перевагу над іншими – відсутність сітки, вони мають і свої недоліки. Зокрема проблеми інтегрування, забезпечення виконання граничних умов, складності в обчисленнях базових функцій. Зважаючи на це, на практиці часто застосовують поєднання безсіткового та методу скінченних елементів. Зокрема нами було запропоновано схему використання такого поєднання – коли в якості області розташування безсіткових вузлів є скінченний елемент. Таке розташування вузлів дозволяє усунути певні недоліки безсіткового методу Гальоркіна. Зокрема забезпечення виконання граничних умов та проблем інтегрування базових функцій по області задачі.

Головна ідея збагаченого скінченного елемента полягає у тому, що всередині звичайного елемента розташовуємо певну кількість безсіткових вузлів, на основі яких будуються базові функції, і за їх допомоги покращується апроксимація. Для забезпечення неперервності апроксимації використовуються модифіковані безсіткові функції [1]. Модифікація має вигляд:

$$N_i^p = (P^T(x) - P_{FEM}^T(x))\alpha(x) \quad (1)$$

$P^T(x)$ – базовий вектор функцій на якому будується апроксимація, $P_{FEM}^T(x)$ – той же вектор функцій, спроектований на скінченноелементний простір, $\alpha(x)$ – вектор невідомих, який обчислюється аналогічно випадку звичайних (немодифікованих) безсіткових функцій.

На основі проведених числових експериментів для задачі адвекції-дифузії-реакції було встановлено, що застосування лінійних збагачених елементів приводить до аналогічних результатів, що й при використанні простих лінійних скінченних елементів. Проте перевага збагачених елементів полягає у можливості використовувати не поліноміальну базу або базу вищих порядків. Знаючи частковий розв'язок задачі, його можна внести до базового вектора $P^T(x)$, що значно покращить апроксимацію, оскільки апроксимація, побудована на основі безсіткових функцій точно відтворює функції із вектора, на основі якого вони побудовані.

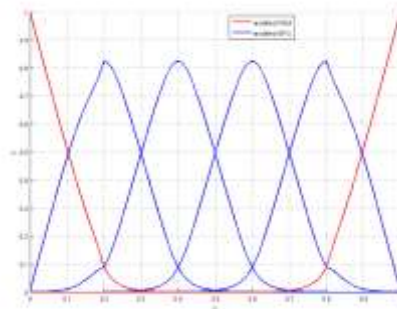


Рис.1. Приклад збагаченого елемента

1. *A. Huerta and S. Fern'andez-M'endez* Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 2000. – 11, Vol. 48. – P. 1615–1636.

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ В ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $z = f(x, y)$, яка задана своїми значеннями в точках (x_i, y_j) ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$):

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$$

Нехай $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $y_0 < y_1 < \dots < y_m$ і

$$|z_{ij}| = a_{ij} \leq M \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m),$$

де M – деяка стала.

Точку $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ з координатами $x = x_i$, $y = y_j$, $z = -\ln a_{ij}$ в просторі хуз назовемо *точкою зображення* значення функції $f(x, y)$ в точці (x_i, y_j) .

Припустимо, що точки зображення P_{ij} значень функції $z = f(x, y)$ в точках (x_i, y_j) ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$) у просторі хуз побудовані. З кожної точки P_{ij} проведемо півпрямую у від'ємному напрямі осі Oz перпендикулярно до площини xy . Множину точок цих півпрямих позначимо через S , а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x, y) \in R$, де $R = \{x_0 \leq x \leq x_n, y_0 \leq y \leq y_m\}$ визначимо точку $B(x, y, \chi(x, y))$, де

$$\chi(x, y) = \sup_{(x, y, z) \in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x, y, \chi(x, y))$, де $(x, y) \in R$, утворює багатогранну поверхню δ_f , яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця поверхня є неперервною, вгнутою і її рівняння має вигляд $z = \chi(x, y)$, $(x, y) \in R$

Поверхня δ_f має такі властивості:

- кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{ij} значення функції $z = f(x, y)$ в точці (x_i, y_j) ;
- кожна точка зображення P_{ij} розміщена на δ_f або нижче неї;
- кожній точці (x_i, y_j) відповідає точка $B_{ij}(x_i, y_j, \chi_{ij})$ поверхні δ_f , де $\chi_{ij} = \chi(x_i, y_j)$.

Позначимо $m_f(x, y) = \exp(-\chi(x, y))$, $(x, y) \in R$.

Тоді для кожної точки (x_i, y_j) ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$) виконується нерівність

$$m_f(x_i, y_j) \leq |f(x_i, y_j)| = |z_{ij}| = a_{ij}.$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що $-\ln a_{ij} \leq \chi(x, y)$, або

$$a_{ij} \geq \exp(-\chi(x, y)) = m_f(x_i, y_j).$$

Крім того,

$$m_f(x_0, y_0) = |f(x_0, y_0)|, \quad m_f(x_0, y_m) = |f(x_0, y_m)|, \\ m_f(x_n, y_0) = |f(x_n, y_0)|, \quad m_f(x_n, y_m) = |f(x_n, y_m)|.$$

Функцію $m_f(x, y)$, визначену на R , назовемо неklasичною мінорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$, а поверхню δ_f – її діаграмою.

Нехай $m_f(x, y) = t_{ij}$, ($i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, m$)

Величини

$$r_{ij}(x) = \left(\frac{t_{i-1,j}}{t_{ij}} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m)$$

і

$$r_{ij}(y) = \left(\frac{t_{i,j-1}}{t_{ij}} \right)^{\frac{1}{y_i - y_{i-1}}} \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad i = 0, 1, \dots, n)$$

назовемо (i, j) -ми числовими нахилами міноранти Ньютона $m_f(x, y)$ відповідно в напрямі осей абсцис і ординат, а величини

$$d_{ij}(x) = \frac{r_{i+1,j}(x)}{r_{ij}(x)} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad d_{0j} = d_{nj} = \infty)$$

і

$$d_{ij}(y) = \frac{r_{i,j+1}(y)}{r_{ij}(y)} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1; \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad d_{i0} = d_{im} = \infty)$$

назовемо (i, j) -ми відхиленнями міноранти Ньютона $m_f(x, y)$ відповідно в напрямі осей Ox і Oy .

Із вгнутості діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності:

$$r_{ij}(x) \geq r_{i+1,j}(x); \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, m);$$

$$r_{ij}(y) \geq r_{i,j+1}(y); \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m-1);$$

$$d_{ij}(x) \leq 1; \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, m);$$

$$d_{ij}(y) \leq 1; \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m-1).$$

Якщо точка зображення P_{ij} розміщена в вершині δ_f , то пару індексів (i, j) назовемо *вершинною*, якщо ж на δ_f , то *діаграмною парою індексів*.

Введений апарат використано для побудови чисельного методу оптимізації як гладких, так і негладких логічно опуклих функцій двох дійсних змінних.

1. Цегелик Г.Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190с.

ВПЛИВ ВЕЛИЧИН ЗАПІЗНЕННЯ КОМАНД УПРАВЛІННЯ НА ХАРАКТЕР ПОЛЬОТУ БЕЗПІЛОТНОГО КВАДРОКОПТЕРА

Чимало процесів, які засновані на передачі маси, енергії, інформації, тощо, супроводжуються наявністю запізнювання. Це запізнювання може бути обумовлене різними причинами – обмеженістю швидкості поширення взаємодії, "не миттєвістю" нервової та м'язової реакції в системах "людина - машина", наявністю інерційності деяких елементів. Системи з неперервним запізненням сигналом розглядалися давно [1,3].

В даній доповіді проаналізовано вплив запізнення дискретного керуючого сигналу на прикладі польоту безпілотного квадрокоптера.

Квадрокоптер конструктивно являє собою поєднання двох підсистем. Електромеханічна підсистема реалізована у вигляді хрестоподібної балочної конструкції, в якій на кожному із кінців однакової довжини балок прикріплені електричні двигуни постійного струму з повітряними пропелерами з незмінюваним кутом атаки так, що сили тяги всіх чотирьох пар "електричний двигун-пропелер" направлені перпендикулярно до площини балочної конструкції. Ця підсистема характеризується масою, моментом інерції та габаритними розмірами. Швидкості обертання роторів електродвигунів і, відповідно, сили тяги пропелерів змінюються шляхом зміни напруг, які подаються на обмотки електродвигунів. Електронна підсистема реалізована як плата управління силою тяги електродвигунів шляхом визначення величини напруг, які необхідно подати на обмотки відповідних електродвигунів для переміщення квадрокоптера по заданій траєкторії. Обчислення необхідних значень напруг виконує мікроконтролер по закону пропорційно-диференціального регулятора, порівнюючи біжучі виміряні значення із заданими. Саме процес обчислення у мікроконтролері величини сигналів управління обумовлює запізнення команд управління. При використанні регулятора вектор вхідних сигналів $\vec{U}$ обчислюється мікроконтролером на основі змінних стану отриманих в момент часу t_i . Результати обчислень отримуються із запізненням τ , тобто в момент часу $t_i + \tau$. При використанні регулятора із запізненням рух системи на відрізок часу від t_i до $t_{i+1} = t_i + \tau$ описується рівнянням

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}) + b_m \cdot \vec{U}(t_i - \tau), \quad \tau > 0$$

Математична модель квадрокоптера представлена системою нелінійних диференціальних рівнянь 16-го порядку у формі Коші [2]. Для дослідження моделі квадрокоптера, як динамічної системи із запізненням, була вибрана фігура простого пілотажу – горизонтальна вісімка. Положення квадрокоптера задається шістьма величинами: просторовими координатами X, Y, Z та кутами θ, γ, ψ . Але змінювати їх ми можемо лише за допомогою чотирьох величин – швидкостей обертання роторів двигунів $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 . Тому виберемо для регулятора чотири змінні: Z, θ, γ та ψ , а саме: висоту польоту квадрокоптера, значення кутів тангажу, крену, ролу. Для аналізу використовувався метод TR-BDF2, на першому етапі використовується метод трапецій, а на другому – формула диференціювання назад 2-го порядку. Для регулювання польоту квадрокоптера використаємо пропорційно-диференціальний регулятор, який описується наступними рівняннями

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}(t) &= \bar{\mathbf{x}}_d(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{U}}(t) &= K_p \cdot \bar{\mathbf{E}}(t) + K_d \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}}(t)\end{aligned}$$

В цій формулі $\bar{\mathbf{E}}(t)$ – різниця між векторами заданих значень параметрів $\bar{\mathbf{x}}_d(t)$ та біжучих $\bar{\mathbf{x}}(t)$, $\bar{\mathbf{U}}(t)$ – вектор регулюючих сил. K_p та K_d – коефіцієнти пропорційного та диференціального регулятора, відповідно. Для дослідження впливу запізнення на процес польоту квадрокоптера за маршрутом горизонтальної вісімки величина запізнення змінювалася, починаючи від $\tau=0$ с до $\tau=0,3$ с. Дослідження показали, що політ модельованого квадрокоптера при даних коефіцієнтах регулятора, може в залежності від величини запізнення відбуватися в трьох суттєво різних областях, а саме: при $\tau < 0,1$ с спостерігається повна відповідність параметрів польоту квадрокоптера щодо заданих; при $0,1 < \tau < 0,2$ с спостерігається часткова втрата керованості, в результаті чого загальний маршрут горизонтальної вісімки квадрокоптер пролітає, але деякі параметри не відповідають заданим, наприклад, висота польоту змінюється періодично з доволі значною амплітудою; при $\tau > 0,25$ с спостерігається повна втрата керованості польотом, в результаті чого квадрокоптер падає на землю.

1.Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения// М. Мир, 1967.

2.Благітко Б., Мочульський Ю., Кіт Л., Заячук І. Моделювання процесу стабілізації та керованості безпілотного квадрокоптера у польоті / Благітко Б., Мочульський Ю., Кіт Л., Заячук І. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. - Вип. 18. – С.21-31.

3.Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом // М. Наука, 1972.

ПОБУДОВА МОДЕЛІ СТУДЕНТА ДЛЯ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ НАВЧАННЯМ

Модель освітнього процесу значно змінилась, в зв'язку із постійним накопиченням знань. Зараз для засвоєння потрібного обсягу навчального матеріалу студент повинен самостійно опрацювати значну кількість навчальної інформації. В зв'язку з цим значна частина ВНЗ використовує системи управління навчанням. В НУХТ ведеться розробка модулів інтелектуальної навчальної системи (ІНС), в основу функціонування якої покладено модель студента. Модель студента – це комплексна інформаційна структура, яка відображає поточний стан знань та індивідуальні переваги кожного студента. Традиційно модель студента описується як множина компонентів з дисципліни, знань що будується, як множина знань, умінь та навичок певної дисципліни. Модель знань студента будується за результатами перманентного контролю рівня навченості студента: вхідного, поточного, тематичного, підсумкового. Модель переваг дозволяє здійснювати адаптацію індивідуальних особливостей студента зафіксованих в процесі навчання.

Передумовою побудови моделі знань студента є ідентифікація причин розбіжності: відсутність в студента декларативних знань; відсутність процедурних знань; наявність помилкових знань; наявність правильних знань, але не знання способу їх застосування чи неправильне застосування; помилки внаслідок неуважності; навмисні помилкові відповіді студента. В розроблювальній ІНС фіксується правильність виконання кожного виду тестового завдання до кожної теми і визначається вид помилки та способи її корекції.

Контроль навчальних досягнень є важливою складовою частиною управління навчальним процесом, і одним з визначальних чинників підвищення його ефективності. Наявність діагностичних цілей дозволяє контролювати стан процесу навчання кожного окремого студента, а отже, проводити його корекцію та оптимізацію.

1. *Тименко С.В.* Освітні Інтернет-системи та моделювання знань // Лабораторія СЕТ. Київ - 2006. http://www.setlab.net/?view=AIED_Overview

2. Международный Форум "Образовательные Технологии и Общество" – Восточно-европейская подгруппа International Forum of Educational Technology & Society <http://ifets.ieee.org/russian/>

*І.М. Болеста, І.І. Колич, А.О. Колкевич, Я.А. Шмигельський,
Р.Я. Шувар*

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ В ПРИСУТНОСТІ НАНОЧАСТИНОК.

Представлено програмну реалізацію методу скінчених різниць в часовій області (FDTD метод) [1] для розв'язання рівнянь Максвелла в присутності наночастинок і наноструктур.

У FDTD методі рівняння Максвелла в диференціальній формі дискретизують за допомогою явної центрально-різницевої апроксимації частинних похідних по часу та просторових координатах, в результаті чого досягається другий порядок точності. При цьому використовується спеціальна просторова сітка (сітка Yee), в якій кожна E -компонента електромагнітного поля оточена чотирма H -компонентами і навпаки [1].

Важливою особливістю методу є необхідність знати значення полів не тільки в обчислювальній області де знаходяться наночастинок, але й у всьому просторі, що є неможливим з технічних причин. Для того, щоб обмежити обчислення скінченим об'ємом, використані т. зв. граничні умови поглинання. Основна ідея – оточити обчислювальну область шаром поглинаючого матеріалу, параметри якого підібрані таким чином, щоб падаюча хвиля на границі обчислювальної області повністю поглиналася без відбивання.

Програмна реалізація FDTD методу з поглинаючими граничними умовами для 3D випадку створена на мові C++.

За допомогою розробленої програми змодельовано поширення електромагнітної хвилі у вигляді гаусового імпульсу крізь середовище з оптичними параметрами вакууму, у центрі якого поміщена срібна кулька (наночастинка) діаметром $d = 10,05$ нм. Вузкий гаусів імпульс (ефективна ширина $s = 7$ нм) з одиничною площею слугує хорошим наближенням δ -функції, що дає можливість за допомогою перетворення Фур'є розрахувати реакцію кульки на падаючу хвилю у широкому частотному діапазоні. Таким чином був розрахований спектр екстинції срібної кульки для монохроматичних гармонічних хвиль з довжинами $\lambda = 300 \div 400$ нм з кроком 1 нм.

1. *Taflove A. Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method. – 2nd ed. / A. Taflove, S.C. Hagness. – Artech House, Boston, 2000. – 852 p.*

М.Б. Вітер

(Міністерство фінансів України)

МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ В СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ ДЕРЖАВНИМИ ФІНАНСАМИ

Основу системи управління державними фінансами (СУДФ) в Україні складають структури, пов'язані з організацією бюджетного процесу – головні учасники бюджетного процесу (головні учасники СУДФ). До них належать: Міністерство фінансів, Державна казначейська служба, Державна податкова служба, Державна фінансова інспекція, їх регіональні підрозділи, а також відповідні розпорядники бюджетних коштів [1].

Під інформаційним простором системи управління державними фінансами у даному випадку розуміється система електронної інформаційної взаємодії головних учасників СУДФ.

Попередні дослідження вказують на доцільність виділення горизонтальної і вертикальної схем електронної інформаційної взаємодії головних учасників СУДФ [2]. Вважається, що горизонтальна взаємодія здійснюється на найвищому рівні між центральними органами державної влади і на нижчих рівнях – між їх регіональними підрозділами. Вертикальна взаємодія здійснюється між центральними органами державної влади та їх регіональними відділеннями, а також відповідними розпорядниками бюджетних коштів.

В рамках вказаних схем будуються графова, теоретико-множинна і кластерна моделі електронної інформаційної взаємодії головних учасників СУДФ. Для кожного типу моделі визначається своя предметна область, сфера застосування, а також структурно-функціональні особливості побудови.

Розробка відповідних моделей інформаційного простору системи управління державними фінансами дозволить формалізувати і оптимізувати процедури інтеграції електронних інформаційних ресурсів СУДФ при переході до технології електронного урядування в Україні.

1. Бюджетний кодекс України – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/2456-17>.

2. *Вітер М.Б.* Нормативно-правове забезпечення інформаційної взаємодії органів державної влади при організації бюджетного процесу / *Вітер М.Б., Сендзюк М.А., Тищенко О.В.* // Вісник Львівської державної фінансової академії. – 2013. – № 24. – С. 20–27.

(Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука)

ЗНАХОДЖЕННЯ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ ДЖЕРЕЛА ЗАБРУДНЕННЯ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОГО МАСОПЕРЕНОСУ В КРИВОЛІНІЙНОМУ ЧОТИРИКУТНИКУ

Розглядається задача конвективно-дифузійного перенесення забруднень в деякому однорідному середовищі (грунті, повітрі, воді) в криволінійному чотирикутнику $ABCD$, обмеженому контуром Γ , від деякого точкового джерела потужності Q , розміщеного в точці $M(x_0, y_0)$, (рис.1).

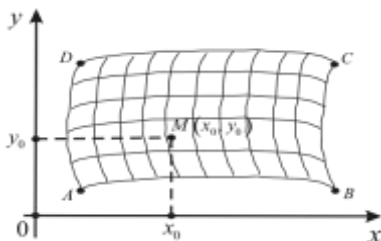


Рис.1. Розміщення
джерела забруднення в
криволінійному чотирикутнику

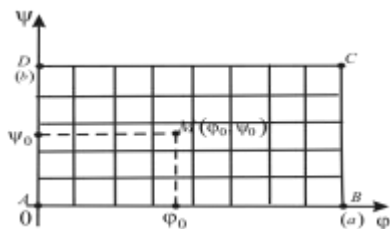


Рис.2. Образ джерела
забруднення в параметричному
прямокутнику

Потрібно при заданих вхідних даних $Q > 0$, $D > 0$, $\gamma > 0$ та значеннях концентрації, замірених в заданих точках $M_i(x_i, y_i)$: $\bar{C}_i = c(x_i, y_i, t_k)$, $i = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, K}$, знайти координати (x_0, y_0) точки M місцеположення джерела забруднень в заданій області, концентрація $c(x, y, x_0, y_0, t)$ від якого визначається із розв'язку наступної крайової задачі:

$$D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma c - \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = -Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(t - t_0), \quad (1)$$

$$c(x, y, x_0, y_0, t) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad c(x, y, x_0, y_0, 0) = 0, \quad (2)$$

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$h \Big|_{AD} = H_1, \quad h \Big|_{CD} = H_2, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AB \cup CD} = 0, \quad (4)$$

де φ - потенціал, ψ - функція течії, h - п'єзометричний напір.

Для розв'язання задачі (1)-(4) використано числове конформне відображення криволінійного чотирикутника з чотирьохма відміченими на його контурі точками A, B, C, D, які при відображенні переходять у вершини прямокутника, на параметричний прямокутник в області комплексного потенціалу (φ, ψ) з сторонами a і b , що здійснюється за допомогою пари спряжених гармонічних функцій $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$

У результаті застосування конформних відображень до (1), (2), отримаємо

$$\frac{1}{J(\varphi, \psi)} \left[D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \right) \right] - \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \gamma c - \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = -Q \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\psi - \psi_0) \delta(t - t_0),$$

$$c(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0, t)|_{\Gamma} = 0, c(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0, 0) = 0,$$

де $J(\varphi, \psi) = \frac{1}{V^2(\varphi, \psi)}$ - якобіан конформного відображення.

Функція Гріна цієї задачі після усереднення якобіана в прямокутнику представляється як:

$$c(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0, t) = \exp \left[\frac{\varphi - \varphi_0}{2D} - \left(\frac{1}{4D\sigma} + \frac{\gamma}{\sigma} \right) (t - t_0) \right] U(\varphi, \psi, t), \text{ де}$$

$$U(\varphi, \psi, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F(m, n) \exp \left[-D't \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right] \sin \frac{n\pi\varphi}{a} \sin \frac{m\pi\psi}{b},$$

$$F(m, n) = Q \sin \frac{n\pi\varphi_0}{a} \sin \frac{m\pi\psi_0}{b}, \quad D' = \frac{D}{\sigma \bar{J}(\varphi_*, \psi_*)},$$

$\bar{J}(\varphi_*, \psi_*)$ - усереднене значення якобіана в параметричному прямокутнику.

Отримано розв'язок даної задачі різними методами: шляхом розв'язку системи нелінійних рівнянь, з використанням методу, що зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь та методу зведення до спряжених рівнянь.

1. Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими узлами"/ Михальчук В.Г.// Препр. АН УССР. Ин-т математики; 89.79.- К.:1989 г.- 55 с.

А.П. Власюк, Т.А. Дроздовський***

(*Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука,

**Національний університет водного господарства та природокористування)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБЛАСТЕЙ ГРУНТУ ПРИ НАГНІТАННІ В НЬОГО В'ЯЖУЧОГО РОЗЧИНУ КОМБІНОВАНИМ МЕТОДОМ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЧИСЕЛЬНИХ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Нехай в ґрунтову основу гідротехнічної споруди (ГТС) під тиском нагнітається в'язучий розчин (рис. 1). Внаслідок цього в ґрунтовій основі еволюціонують дві підобласті G_1 (область нагнітання) та G_2 , ґрунтові середовища яких характеризуються відповідно параметрами Ламе λ_1, μ_1 та λ_2, μ_2 . Межа фронту нагнітання γ характеризується в момент часу t кривою $\gamma(t)$. Потрібно розрахувати зміну напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву в областях G_1 і G_2 .

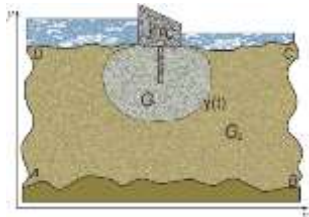


Рис. 1. Ґрунтова основа ГТС

Математична модель задачі в загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею[3-5]:

$$\operatorname{div}(k(x, y, m) \cdot \operatorname{grad} h) = 0, \quad (1)$$

$$\mu_i \cdot \Delta U + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = X_i, \quad (2)$$

$$\mu_i \cdot \Delta V + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = Y_i, \quad (3)$$

з наступними крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad h|_{\Gamma_3} = H_m, \quad h|_{\gamma(t)} = -y, \quad \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = \frac{k}{m} (\operatorname{grad} h, \vec{n}) \vec{n} \quad (4)$$

$$U|_{AB} = V|_{AB} = 0, \quad \sigma_n|_{\Gamma} = \tau_s|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

$$[U]|_{\gamma(t)} = [V]|_{\gamma(t)} = 0, \quad [\sigma_n]|_{\gamma(t)} = [\tau_s]|_{\gamma(t)} = 0. \quad (6)$$

Тут: h – напір в'язучого розчину, k – коефіцієнт фільтрації, m –

пористість середовища, $\mathbf{u} = (U, V)$ – вектор зміщень, X_i, Y_i – компоненти масової сили в підобласті G_i , $i = 1, 2$, σ_n, τ_s – компоненти повного напруження, $\Gamma = \partial G / \partial AB$ – частина межі області G .

Чисельний розв’язок крайової задачі (1)–(6) знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій [2] у поєднанні з методом чисельних конформних відображень [1] у вигляді

$$u_n(X, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(r_j, \varepsilon),$$

$$v_n(X, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(r_j, \varepsilon), h_n(X, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad (7)$$

де $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$ – деяка неперервна або кусково-неперервна радіальна базисна функція; $a_j, b_j, c_j, j = 1, n$ – невідомі параметри.

З рівнянь (1)–(3), граничних умов (4), (5) та умов спряження (6) при застосуванні методу коллокації в точках, отримано три СЛАР для обчислення невідомих $a_j, b_j, c_j, j = 1, n$. Їх розв’язок отримано методом Гауса. Множину коллокаційних вузлів $M_j = (x_j, y_j), j = 1, n$ отримано методом чисельних конформних відображень [1].

Розроблено обчислювальний алгоритм та програмне забезпечення розв’язування крайової задачі. Проведено серію числових експериментів при різних вихідних даних та здійснено аналіз їх результатів.

Проведене математичне і комп’ютерне моделювання дало можливість здійснювати оцінку зміни НДС ґрунтової основи гідротехнічної споруди унаслідок нагнітання в’язучого розчину. Це у свою чергу може бути використано для оцінки несучої здатності ґрунтів основи, стійкості і надійності споруди.

1. Власюк А.П., Дроздовський Т.А. Комп’ютерна генерація конформних і квазіконформних різницевих сіток в областях складної геометричної форми / Тез. доп. XVI Міжнар. Конф. Прийняття рішень в умовах невизначеності – Ялта, 2010. – С.153-156.

2. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Чисельне розв’язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функцій: Монографія. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.

3. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. // В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко - Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.

4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

5. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — К.: 1991. 432 с.

(*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янука

**Національний університет водного господарства
та природокористування)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОЇ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ У НАСИЧЕНОМУ КАТАЛІТИЧНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ДО СИСТЕМИ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ФІЛЬТРІВ-ВЛОВЛЮВАЧІВ У ЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ

Проведено математичне моделювання процесу вертикальної міграції радіонуклідів у насиченому каталітичному пористому середовищі, у якому наявні сорбуючі гранули з наночастинками, до системи горизонтально розміщених фільтрів-вловлювачів (рис. 1).

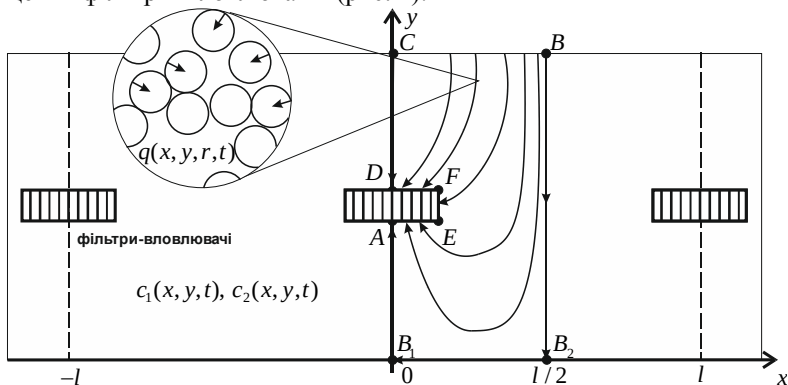


Рис.1. Міграція радіонуклідів до системи горизонтальних фільтрів-вловлювачів у насиченому каталітичному пористому середовищі

Математичну модель поставленої задачі у виділеному фрагменті області фільтрації в лінійній двохвимірній постановці можна описати наступною крайовою задачею [1,2]:

$$D_1 \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - V_y \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$D_2 \left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \theta \frac{\partial q}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial q(x, y, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad q(x, y, r, t)|_{r=R} = k_e \cdot c_2(x, y, t), \quad (4)$$

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} + \nu \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} + \nu \frac{\partial c_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$h|_{CB} = H_1, \quad h|_{AEFD} = H_2, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{AB_1 \cup BB_2 \cup CD} = 0, \quad (6)$$

$$l_1 c_1|_{CB} = \tilde{C}_1^1(t), \quad l_2 c_1 = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{C}_1^2, \\ \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_{AEFD} \end{array} \right. = 0, \quad (7)$$

$$l_3 c_2|_{CB} = \tilde{C}_2^1(t), \quad l_4 c_2 = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{C}_2^2, \\ \left. \frac{\partial c_2}{\partial n} \right|_{AEFD} \end{array} \right. = 0, \quad (8)$$

$$c_1|_{t=0} = \tilde{C}_1^0, \quad c_2|_{t=0} = \tilde{C}_2^0, \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial c_2}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = BB_2B_1AEFDC. \quad (9)$$

Чисельний розв'язок поставленої крайової задачі (1)-(9) отримано методом скінченних різниць із застосуванням побудованих монотонних різницьових схем. Шляхом проведення числових експериментів знайдено розподіл напору, компонент швидкостей фільтрації V_x , V_y , концентрацій $c_1(x, y, t)$, $c_2(x, y, t)$ та $q(x, y, r, t)$. Проведено аналіз отриманих результатів, що дало можливість зробити прогноз щодо ступеня забруднення ґрунтів, їх подальшого очищення та використання.

1.Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 1991. – 432 с.

2.Власюк А.П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів у каталітичному пористому середовищі при наявності фільтрів-вловлювачів в неізотермічних умовах./ А.П. Власюк, В.В. Жуковський // Тез. доп. Міжнар. науково-практичної конф. "Проблеми розвитку вищої школи та економіки в ХХІ столітті", 3-4 жовтня 2013 року, Рівне: РВЦ МЕНУ ім. ак. С. Дем'янука, 2013. - С. 77-79. (450 с.)

АВТОМАТИЗАЦІЯ БІБЛІОТЕКИ УНІВЕРСИТЕТУ

В Міжнародному економіко-гуманітарному університеті ім. акад. Степана Дем'янчука створено та впроваджено електронну систему обслуговування читачів бібліотеки. Дана система базується на основі використання системи штрих кодів при видачі та поверненні літератури.

Інформація про документи бібліотеки заноситься до бази даних, кожному із яких присвоюється унікальний ідентифікатор у вигляді штрих-коду. Даний штрих-код роздруковується і наклеюється на документ.

Інформація про читачів бібліотеки (студенти, працівники університету) також заноситься до бази даних. Для читачів бібліотеки генеруються унікальні штрих-коди, на основі яких вони можуть отримувати літературу. Важливо зазначити, що генерування штрих-кодів базується на основі унікального ключа запису у базі даних, що не допускає повторень.

В якості сервера баз даних обрано MySQL [1]. Програмна система, що працює із даною базою даних, є система «1С Підприємство».

Роботу програми по обслуговуванню читачів можна розділити на декілька етапів.

1. Вхід у систему працівника бібліотеки. Після успішного входження до системи бібліотекар має право проводити видачу та здачу літератури.

2. Ідентифікація читача бібліотеки, проведення операції видачі літератури для даного читача. Проводиться сканування штрих-коду читача, після чого відкривається вікно для видачі літератури. Після цього скануються штрих-коди на документах і проводиться їх видача для даного користувача, що було ідентифіковано.

3. Ідентифікація документів бібліотеки для їх повернення. Проводиться сканування штрих-коду документів і виконується перевірка чи даних документ є виданий на “для читача. Якщо даний документ є виданий, то для нього проводиться операція списання даного документу із читача.

Автоматизовану електронну систему обслуговування читачів успішно протестовано та впроваджено для обслуговування читачів бібліотеки університету. Великою перевагою системи є можливість видачі літератури на читальний зал та абонемент.

1. *Веллинг Л., Томсон Л.* MySQL: Краткое изложение основ работы с MySQL. – М., СПб., К.: ИД "Вильямс", 2005. – 304 с.

А.П. Власюк, Н.А. Федорчук***

(*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука,

**Національний університет водного господарства
та природокористування)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА СИЛ ЗВ'ЯЗНОСТІ В ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Проведено математичне моделювання напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву в двовимірному випадку з урахуванням тепло-масоперенесення та сил зв'язності. Ґрунтовий масив розглянуто прямокутної форми, що займає область $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ (рис. 1).

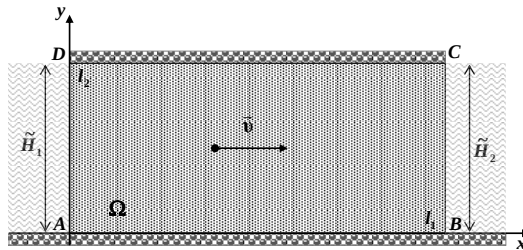


Рис.1. Ґрунтовий масив, у якому розраховується НДС з урахуванням тепло-масоперенесення та сил зв'язності

Математичну модель даної задачі в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} = X, \quad (1) \\ & \mu(c, T) \Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial y} = Y, \end{aligned}$$

$$X = \frac{dp}{dx} + f(c), \quad Y = \gamma_{\mathcal{A}} + \frac{dp}{dy} + f(c), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) - \mathbf{v} \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_p \mathbf{v} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{v}_c(c) \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad \text{div} \mathbf{v} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v} c - \mathbf{D}(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T, \quad \mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{v} T - \lambda_T(c, T) \nabla T, \quad (6)$$

$$(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{n}})|_{AB \cup CD} = 0, \quad h|_{AD} = \tilde{H}_1, \quad h|_{BC} = \tilde{H}_2, \quad (7)$$

$$(\bar{\mathbf{q}}_c, \bar{\mathbf{n}})|_{AB \cup CD} = 0, \quad c|_{AD} = \tilde{C}_1, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \quad (8)$$

$$(\bar{\mathbf{q}}_T, \bar{\mathbf{n}})|_{AB \cup CD} = 0, \quad T|_{AD} = \tilde{T}_1, \quad T|_{BC} = \tilde{T}_2, \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (x, y) \in AB \cup CD, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad (x, y) \in AD \cup BC, \quad (10)$$

$$h(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = \tilde{T}_0(x, y), \quad (11)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \sigma_y = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \tau_{xy} = 2\mu(c, T) \varepsilon_{xy}, \quad (13)$$

де $(x, y) \in \Omega$, t – час, $t \in (0; T]$; $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$, $\tilde{H}_0(x, y)$, $\tilde{C}_0(x, y)$, $\tilde{T}_0(x, y)$ – деякі задані функції; $f(c)$ – функція, яка виражає вплив щільності ґрунту на його НДС за рахунок сил зв'язності.

Чисельний розв'язок поставленої крайової задачі (1) – (13) отримано методом скінченних різниць. Шляхом проведення чисельних експериментів знайдено компоненти вектора зміщень, компоненти тензорів напружень та деформацій, а також розподіл полів напору, швидкості фільтрації, концентрації сольового розчину та температури в ґрунтовому масиві. Здійснено аналіз отриманих результатів.

1. Власюк А.П. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану багатопорового ґрунтового масиву за наявності рівня ґрунтових вод та впливу тепло-масоперенесення в одновимірному випадку / *А.П. Власюк, Н.А. Федорчук* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова Нац. акад. наук України, Кам.-Под. нац. ун-т ім. І.Огієнка; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред. та ін.]. – Кам'янець-Подільський: Кам.-Под. нац. ун-т ім. І.Огієнка, 2013. – Вип. 8 – С. 31 – 44. (144с.)

(* Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука,

** Національний університет водного господарства та природокористування)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЛЕПЕРЕНЕСЕННЯ ПІД ВПЛИВОМ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГО- ПЕРЕНЕСЕННЯ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ

Проведено математичне моделювання перенесення солей під впливом нестационарної фільтрації підземних вод до системи горизонтальних дренажів та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах, яке зводиться до чисельного розв'язання наступної крайової задачі [1]:

$$\frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1(c_1 - C^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = a \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad (2)$$

$$v_x(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad v_y(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_y(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - \gamma_2(c_2 - C^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$v_x(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x}, \quad v_y(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \quad (6)$$

при відповідних крайових умовах на межах областей фільтрації та вологоперенесення, а також умовах спряження на вільній межі.

Для задачі (1)-(6) побудовано монотонну різницеву схему та отримано її чисельний розв'язок.

1. Власюк А.П., Цветкова Т.П. Математичне моделювання солеперенесення при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених шаруватих ґрунтових середовищах у випадку зволожуючого стаціонарного режиму // Тез. XXII Міжнар. конф. Прийняття рішень в умовах невизначеності", 23-27 вересня 2013 р. Ялта-Форос, 2013. – С. 55-57

ВАРІАНТ РЕАЛІЗАЦІЇ ПОЛІМОРФІЗМУ В ORM-СИСТЕМІ

В (1) запропоновано варіант імплементації принципів інкапсуляції та наслідування парадигми об'єктно-орієнтованого програмування у застосуванні об'єктного підходу до розробки моделей даних інформаційних систем з реляційним сервером баз даних. Численні практичні застосування як підтвердили ефективність та надійність використаної методики, так і виявили шляхи її подальшого розвитку. Однією з найактуальніших практично важливих проблем у даному напрямку стала потреба розробки схеми запровадження принципу поліморфізму у реалізаціях моделей процесів таких ORM-систем.

Специфіка запропонованої в (2) схеми побудови моделі процесів у вигляді окремої ієрархії класів, яка заснована на правилах спадкування моделі даних та передбачає застосування поліморфізму підтипів (включення), вимагає підтримки системи службових таблиць та реалізації відповідності між назвами процедур обробки даних різних класів та програмних форм, що їх представляють. У практичних застосуваннях такий підхід виявився доволі громіздким як у частині розробки програмного коду, так і в супроводі програмного продукту.

Найбільш перспективним, зокрема, економним у реалізації, напрямком вирішення цієї проблеми стало задіяння в роботу вбудованих у розвинуті мови програмування засобів підтримки поліморфізму. Платою за це, щоправда, стає необхідність переходу від більш універсального параметричного до ситуативного поліморфізму, але, як виявилось, такі обмеження вже й так неявно обумовлені специфікою запропонованої в (2) методики побудови моделі процесів.

З використанням штатних засобів (на рівні компілятора) підтримки поліморфізму методику наслідування функціональності в моделі процесів (2) вдалося значно спростити. Ефективність та надійність запропонованих алгоритмів підтверджено достатньою кількістю практичних реалізацій.

1. *Вовк В.Д.* Застосування об'єктного підходу до розробки інформаційних систем на основі реляційних баз даних / В.Д.Вовк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформатика. —2000. — Вип. 2. — С. 184-190.

2. *Вовк В.Д.* Застосування об'єктного підходу до розробки моделі процесів інформаційних систем з використанням реляційних баз даних / В.Д. Вовк., Б.Я. Мушкевич // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформатика. —2002.— Вип.5.— С. 184-188.

АПРОКСИМАЦІЯ КОНТУРНИХ КРИВИХ ПАРАБОЛІЧНИМИ СПЛАЙНАМИ

При опрацюванні цифрової геодезичної та картографічної інформації виникає задача аналітичного подання контурних кривих на площині у вигляді неперервних параболічних сплайнів. Такими кривими є лінії рівня. Використання для цієї мети традиційних підходів із застосуванням *B*-сплайнів не забезпечує наперед заданої похибки наближення на максимально можливому проміжку. Така задача могла би бути розв'язана з використанням чебишовських сплайнів [1]. Однак її розв'язку на сьогодні все ще немає. Тому метою роботи є побудова методу наближення з заданою абсолютною похибкою таблично заданої кривої на площині, у тому числі і замкнутої, за допомогою неперервного параболічного чебишовського сплайна. Зазначимо при цьому фундаментальну властивість чебишовського наближення – воно єдине, а абсолютна похибка наближення (чебишовська норма) залежить від системи координат, в якій розглядається наближувала крива. Тому, для наближення замкнутих кривих, доцільно розглядати таку похибку-відстань у точці, яка не залежить від системи координат. Деякі спроби пошуку таких похибок-відстаней вже робилися для кусково-лінійних наближень [2]. Однак для параболічних наближень не розглядалися. Для цього визначатимемо абсолютну похибку наближення (чебишовська норма) функції $f(x)$ параболою

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

у точці x_0 як відстань ρ між точкою з координатами $(x_0, y_0 = f(x_0))$ та дотичною, що проведена до параболи $g(x)$ у точці з координатами $(x_0, g(x_0))$ і описується рівнянням

$$Dx + Ey + F = 0. \quad (2)$$

При цьому будемо виходити з того, що рівняння дотичної до параболи $g(x)$ у точці з координатами $(x_0, g(x_0))$ має вигляд

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0), \quad (3)$$

де $g'(x_0)$ – значення похідної функції $g(x)$ при $x = x_0$. Для квадратного тричлена похідна відповідає виразу $g'(x_0) = 2ax_0 + b$, тому рівняння дотичної (3) можемо записати як

$$y = g(x_0) + (2ax_0 + b)(x - x_0), \quad (4)$$

або у більш загальному вигляді (2) з параметрами:

$$D = 2ax_0 + b, \quad E = -1, \quad F = g(x_0) - x_0(2ax_0 + b).$$

Тоді вираз для визначення абсолютної похибки шукатимемо як відстань ρ від точки з координатами $(x_0, y_0 = f(x_0))$ до дотичної (2) так:

$$\begin{aligned} \rho(x_0) &= \frac{|Dx_0 + Ef(x_0) + F|}{\sqrt{D^2 + E^2}} = \frac{|(2ax_0 + b)x_0 - f(x_0) + g(x_0) - x_0(2ax_0 + b)|}{\sqrt{(2ax_0 + b)^2 + 1}} = \\ &= \frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{\sqrt{(2ax_0 + b)^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Маючи вираз для визначення абсолютної похибки наближення (5) далі будемо алгоритм апроксимації таблично заданої функції, яка є кривою на площині, параболічним чебишовським сплайном з інтерполюванням у лівій границі [3] зліва на право. Тобто сплайн подається як функція, склеєна з відрізків парабол. За означенням [4] таку функцію $S_2(x) = S_{2,2}(x, Z)$ називають поліноміальним сплайном степеня 2 та дефекта 2 з вузлами Z . Вузли сплайна є границями проміжків, на яких досягається задана точність наближення. Тобто, у цьому алгоритмі використовуємо відомий спосіб побудови сплайнів із заданою похибкою [5]. Щодо знаходження безпосередніх значень параметрів a , b і c наближень параболою, які водночас є і параметрами ланки сплайну, то для цього застосовуємо відомий розв'язок задачі чебишовської інтерполяції з умовою [4-6]. Завдяки цьому отриманий сплайн є неперервною функцією. Він дозволяє в аналітичному вигляді описувати криві на площині.

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наукова думка, 1989. – 272 с.

2. Кетков Ю.Л. Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации // Известия ВУЗ Радиофизика. – 1966. – Том IX. – № 6. – С. 1202 – 1209.

3. Попов Б.А. Наилучшее многочленное приближение с условием // Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. Киев: ИК АН УССР, 1981. – Вып. 4. – С. 55 – 65.

4. Попов Б.А. Равномерное приближение с интерполированием // Отбор и передача информации. – Вып. 60, 1980. – С. 47 – 56.

5. Попов Б.А. Равномерное приближение с заданной ошибкой // Отбор и передача информации. – Вып. 60, 1980. – С. 57 – 67.

6. Попов Б.А. Параболические сплайны с заданной ошибкой // Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. Киев: ИК АН УССР, 1981. – Вып. 5. – Ч. I (Алгоритмы). – С. 55 – 65.

(*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ;

**Інститут механіки і прикладної інформатики, Університет Казимира Великого в Бидгощі)

КОНВЕКТИВНЕ ОСУШЕННЯ ЗЕРНИСТОГО МАТЕРІАЛУ З УРАХУВАННЯМ ДВОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ ОКРЕМОЇ ЗЕРНИНИ

Внутрішній вологоперенос у зерні носить, зазвичай, дифузійний характер [1]. Перерозподіл води в зерні змінює його структурно-механічні властивості, спричинює утворення мікротріщин і розрихлення. Структура впливає не тільки на поглинання або видалення вологи, але і на фізико-хімічні процеси, які змінюють об'єм та якість зерна.

Далі окрему зернину розглядаємо як двошарову кульку еквівалентного об'єму [1], віднесену до сферичної системи координат, початок якої є в її центрі ($r = 0$). Процес осушення відбувається через поверхню $r = R$ контакту з міжзерновим середовищем, характеристики якого залежать від місця у шарі зерна та визначені з розв'язку зовнішньої задачі масопереносу в міжзерновому просторі для повітряної суміші, яка фільтрується через шар зі швидкістю ν у режимі повного витіснення. Локальний термодинамічний стан матеріалу визначається значеннями параметрів [2] $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}$, $C^{(i)}$, де $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}$ — компоненти тензора деформацій, $C^{(i)}$ — концентрація вологи. Індекс $i=1$ відповідає внутрішній області ($0 \leq r \leq r_*$), $i=2$ — зовнішній області ($r_* \leq r \leq R$) зернини. За початковий стан прийнято природний стан кулі за відсутності зовнішніх дій. У цьому стані термодинамічні параметри набувають значень $\sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = 0$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} = 0$; $C^{(i)} = C_0^{(i)}$, де $\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}$ — компоненти тензора напружень. За визначальні функції приймаємо вектор переміщень $\vec{u}^{(i)}$ і відхилення концентрації $c^{(i)} = C^{(i)} - C_0^{(i)}$ вологи.

Ключова система рівнянь для окремої кульки є системою взаємозв'язаних рівнянь механодифузії, які мають вигляд [2]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r^{(i)})}{\partial r} \right] - \xi^{(i)} \beta^{(i)} \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial (rc^{(i)})}{\partial \tau} = D^{(i)} \frac{\partial^2 (rc^{(i)})}{\partial r^2} - D_\varepsilon^{(i)} \frac{\partial^2 (r\varepsilon^{(i)})}{\partial r^2},$$

де $\xi^{(i)} = 3K^{(i)} / (3K^{(i)} + 4G^{(i)})$, $\varepsilon^{(i)} = \partial u_r^{(i)} / \partial r + 2u_r^{(i)} / r$; $D^{(i)}$ — коефіцієнт дифузії; $D_\varepsilon^{(i)}$ — коефіцієнт впливу градієнта поля об'ємної деформації на масо-

вий потік; $K^{(i)}$ — модуль всестороннього об'ємного стиску; $G^{(i)}$ — модуль зсуву; $\beta^{(i)}$ — концентраційний коефіцієнт об'ємного розширення; $u_r^{(i)}$ - радіальні переміщення; $\varepsilon^{(i)}$ - об'ємна деформація. При $\tau = 0$ задані переміщення та концентрації. Коли $r = R$, то дифузійний потік пропорційний до різниці концентрацій вологи на поверхні зернини $c_R^{(2)}$ і міжзернового середовища c_z : $-\tilde{D}^{(2)} \partial c^{(2)} / \partial r|_{r=R} = k(c^{(2)}|_{r=R} - c_z)$, $\tilde{D}^{(i)} = D^{(i)} - \xi^{(i)} \beta^{(i)} D_\varepsilon^{(i)}$, k - коефіцієнт масовіддачі. На межі областей 1 і 2 ($r = r_*$) зернини справджується рівність потоків пароповітряної суміші $J_r^{(1)} = J_r^{(2)}$. Рівняння масопереносу вологи C_z у міжзерновому просторі шару ϵ :

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} + v \frac{\partial c_z}{\partial z} = D_z \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} + J,$$

де D_z - коефіцієнт дифузії вологи в міжзерновому середовищі; $J(\tau) = c_z J_0(\tau) - c_0 J_0(\tau)$ - інтенсивність локального джерела вологи з зернин, $J_0(\tau) = -\alpha \tilde{D}^{(2)} \partial c^{(2)} / \partial r|_{r=R}$, де α - коефіцієнт, який залежить від розміру кульок та їх упакування.

Заміною $g^{(i)}(r, \bar{z}, \tau) = c_z(z, \tau) - c^{(i)}(r, \bar{z}, \tau)$ задачу зведено до визначення величин $g^{(i)}$. Визначивши власні значення відповідної задачі Штурма-Ліувіля, отримано власні функції та фундаментальні розв'язки задачі масопереносу у областях 1 і 2 зернини, а також у міжзерновому середовищі. Тоді враховуючи зв'язки між концентрацією вологи й об'ємною деформацією та розв'язавши відповідні крайові задачі для переміщень в областях 1 і 2, визначено напружено-деформований стан зернини в залежності від місця розміщення її в шарі. Показано, що в місцях ненасичення вологи в міжзерновому середовищі має місце усадка зернини, а в місцях насичення — її набухання, що дозволяє встановлювати оптимальні режими зберігання зерна.

1. Буряк Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. — Київ: Наук. думка, 2006. — 272 с.

2. Егоров Г.А. Технологические свойства зерна. — Москва: Агропромиздат, 1985. — 334 с.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ПОДАТКОВИХ НАДХОДЖЕНЬ ДО БЮДЖЕТУ УКРАЇНИ

Проводиться аналіз та прогнозування основних податкових надходжень до бюджету України за допомогою побудованих регресійних моделей на основі статистичних даних за 2001-2013рр.. Розглядається питання ефективності податкової системи України.

Розглянемо дані про податкові надходження до Державного бюджету за 2001-2013рр. [1]. Найбільші податкові надходження в державний бюджет забезпечують наступні види податків: податок з доходів фізичних осіб, податок на прибуток підприємств та податок на додану вартість.

Для цих найвагоміших податкових надходжень побудуємо марематичні моделі вигляду [2]: $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ або $y = \alpha \beta^t$.

Невідомі параметри будемо знаходити за допомогою методу найменших квадратів, тобто мінімізуючи суму квадратів відхилень фактичних даних від теоретичних

$$F(a_0, a_1, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

У випадку квадратичної апроксимації умова (1) прийме вигляд:

$$F(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 t_i - a_2 t_i^2)^2 \rightarrow \min.$$

Для побудови експоненціальної моделі прологарифмуємо обидві частини рівняння $y = \alpha \beta^t$, вважаючи що $\alpha > 0$. Одержимо $\ln y = \ln \alpha + t \ln \beta$. Зробивши заміну $z = \ln y$, $a_0 = \ln \alpha$, $a_1 = \ln \beta$, матимемо $z = a_0 + a_1 x$. Тоді умова (1) прийме вигляд

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (z_i - a_0 - a_1 t_i)^2 \rightarrow \min$$

і для знаходження коефіцієнтів a_0, a_1 одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n z_i = n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n t_i, \\ \sum_{i=1}^n z_i t_i = a_0 \sum_{i=1}^n t_i + a_1 \sum_{i=1}^n t_i^2. \end{cases}$$

Розв'язавши її знайдемо коефіцієнти a_0, a_1 . Тоді $\alpha = e^{a_0}$, $\beta = e^{a_1}$.

Нами побудована експоненціальна модель для апроксимації динаміки надходжень до Державного бюджету податку з доходів фізичних осіб. Ця модель має вигляд: $y = e^{8,8222+0,2123t}$.

Для апроксимації динаміки надходжень податку на прибуток підприємств нами побудована квадратична модель вигляду

$$y = 32,84t^2 + 4053t + 2076.$$

Для отримання апроксимації динаміки надходжень податку на додану вартість нами побудована квадратична модель

$$y = 668,6t^2 + 3553t - 1410.$$

Коефіцієнти кореляції для побудованих моделей відповідно становлять $r_1=0,964$, $r_2=0,905$, $r_3=0,919$. Оскільки значення цих коефіцієнтів близькі до одиниці, то на основі цих моделей нами зроблений прогноз розглянутих показників на 2014 - 2016рр. (табл.1).

Таблиця 1.

Роки	Податок з доходів фізичних осіб	Податок на прибуток підприємств	Податок на додану вартість
	Млн. грн.		
2014	71978,2	60984,2	149152,1
2015	73451,5	63783,5	168625,5
2016	76162,7	66258,1	188536,2

Як видно з табл.1, й надалі лідером серед найвагоміших податкових надходжень буде податок на додану вартість. Причому, він буде переважати навіть суму надходжень податку з доходів фізичних осіб та надходження податку на прибуток підприємств.

Питання вдосконалення оподаткування знаходяться в центрі уваги наукової і громадської думки. Особливо сьогодні, в пошуках шляхів виходу з економічної кризи, нарізла необхідність податково-бюджетного регулювання в Україні замість проведення суто фіскальної податкової політики. Крім цього, визнано гостроту проблеми оподаткування, пов'язаної з надмірністю податкового тягаря. Останній і є однією з причин фінансової нестабільності підприємств, зменшення сукупного попиту і економічної кризи.

1.Офіційний сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс] / Державна служба статистики України. – Режим доступу: <http://ukrstat.gov.ua/>

2.Лук'яненко І.Г., Красінкова Л.І. Економетрика: Підручник. – Київ: Т-во «Знання», КОО, 1998. – 494с.

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІЙ

В [1] розглянуто використання апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично [2], для побудови чисельних методів нульового порядку оптимізації як гладких, так і негладких, розривних й заданих дискретно функцій однієї, двох та багатьох дійсних змінних. Основна перевага цих методів над класичними та їхніми модифікаціями полягає в такому: для відшукування точки екстремуму не треба знати околу, де знаходиться точка; збіжність алгоритму методу не залежить від вибору початкового наближення; функція може бути гладкою, негладкою, розривною, дискретною; простота та наглядність алгоритмів чисельних методів. Для побудови чисельних методів оптимізації функцій більш як двох дійсних змінних використано ідею покоординатного підйому.

В доповіді розглядається побудова апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій багатьох дійсних змінних, заданих таблично, та його використання для розробки чисельного методу нульового порядку оптимізації логарифмічно вгнутих функцій багатьох дійсних змінних (гладких, негладких, розривних, дискретних).

Розглянемо довільну функцію дійсних змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначену в області $D = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ для всіх $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. Нехай функція

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана своїми значеннями на дискретній множині точок $R = \{x_i = a_i + k_i h_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, де $k_i = 0, 1, \dots, m_i$, $h_i = \frac{b_i - a_i}{m_i}$. Позначимо $f(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n) = a_{k_1 k_2 \dots k_n}$. У

просторі змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ побудуємо точки зображення $P_{k_1 k_2 \dots k_n}(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n, -\ln a_{k_1 k_2 \dots k_n})$ і з кожної точки

$P_{k_1 k_2 \dots k_n}$ проведемо півпрямую в додатному напрямі осі Oy . Сукупність точок цих півпрямих позначимо через S , а їхню опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ знайдемо точку $B_x(x_1, x_2, \dots, x_n, \chi_x)$, де $\chi_x = \inf_{y \in C(S)} y$.

Множина точок $B_x, x \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f , яку називатимемо неklasичною діаграмою Ньютона, визначеного в області D , функції $y = f(x)$, заданої таблично. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд $y = \chi(x)$, де $\chi(x) = \chi_x, x \in D$.

Позначимо $M_f(x) = \exp(-\chi(x)), x \in D$.

Тоді для будь-якого $x \in R$ виконується нерівність $-\ln f(x) \geq \chi(x)$, або $f(x) \leq \exp(-\chi(x)) = M_f(x)$. Функцію $M_f(x)$, визначену в області D , називатимемо неklasичною мажорантою Ньютона функції $y = f(x)$, заданої таблично.

Позначимо через $T_{k_1 k_2 \dots k_n}$ значення мажоранти Ньютона в точці $x = (a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \dots, a_n + k_n h_n)$. Величини

$$R_{k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n}(x_i) = \left(\frac{T_{k_1 \dots k_{i-1} l_i - 1 k_{i+1} \dots k_n}}{T_{k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n}} \right)^{\frac{1}{h_i}}, \quad l_i = 1, 2, \dots, m_i, \quad \text{називатимемо}$$

$(k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n)$ числовими нахилами мажоранти $M_f(x)$ в напрямі

осі Ox_i , а величини $D_{k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n}(x_i) = \frac{R_{k_1 \dots k_{i-1} l_i - 1 k_{i+1} \dots k_n}(x_i)}{R_{k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n}(x_i)}$ називатимемо

$(k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n)$ відхиленнями в напрямі осі Ox_i .

Із опуклості діаграми δ_f випливають такі властивості:

$$R_{k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n}(x_i) \leq R_{k_1 \dots k_{i-1} l_i - 1 k_{i+1} \dots k_n}(x_i), \quad D_{k_1 \dots k_{i-1} l_i k_{i+1} \dots k_n}(x_i) \geq 1,$$

$\max_{x \in R} f(x) = \max_{x \in D} M_f(x)$. Крім того, якщо $\max_{x \in R} f(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, то

$\max_{x \in D} M_f(x) = M_f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Ці властивості лежать в основі чисельного

методу нульового порядку відшукування з певною точністю екстремуму будь-якої логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних за будь-якого початкового наближення. Зазначимо, якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - логарифмічно вгнута функція, то $T_{k_1 k_2 \dots k_n} = a_{k_1 k_2 \dots k_n}$.

Суть методу полягає в наступному. В області D будуємо сітку $x_i = a_i + k_i h_i$, де $k_i = 0, 1, \dots, m_i$, $h_i = \frac{b_i - a_i}{m}$ і в сітковій області R вибираємо будь-яке початкове наближення $f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Після цього в сітковій області R знаходимо послідовність точок, яка з точністю $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ збігається до екстремальної точки. Напрям переходу від точки до точки і ознака закінчення виконання алгоритму визначається значеннями відповідних числових нахилів.

1. *Глебена М.І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційного типу процесів: автореф. Дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02. „Математичне моделювання та обчислювальні методи” / М.І. Глебена: ДВНЗ „Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”. — Івано-Франківськ, 2012. — 23 с.

2. *Цегелик Г.Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г. Цегелик. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. — 190с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДВОХВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ

Загальна постановка класу задач, що досліджується, виглядає наступним чином. Розглядається багатошарова смуга, що складається із N шарів, які лежать на пружному напівпросторі або жорсткій основі.

Граничні поверхні шарів плоскі і паралельні між собою. Товщина шарів довільна.

Елементи шаруватого середовища складаються з стисливих або нестисливих попередньо напружених ізотропних нелінійно-пружних матеріалів з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного тіла вважаємо, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей вибраної системи координат.

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан шаруватого середовища є однорідним.

До вільної границі першого шару прикладено навантаження, що рухається з постійною швидкістю. Відносно системи координат, зв'язаної з цим навантаженням, існує усталений плоский деформований стан.

Також припускаємо, що напруження, які виникають за рахунок дії навантаження, є значно менші початкових напружень. Вказане припущення дозволяє застосувати лінеаризовану теорію пружності [1] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

При таких припущеннях з урахуванням загальних розв'язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями рівняння руху елементів багатошарового середовища можна записати у вигляді [1]

$$\left(\eta_1^{(s)2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{(s)2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(s)(j)} = 0; \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (1)$$

Функції $\eta_j^{(s)}$ в рівняннях руху (1) визначаються із рівнянь

$$\eta^{(s)4} + 2A^{(s)} \eta^{(s)2} + A_1^{(s)} = 0, \quad (2)$$

де для стисливого тіла

$$2A^{(s)} \tilde{\omega}_{222}^{(s)} \tilde{\omega}_{2112}^{(s)} = \tilde{\omega}_{222}^{(s)} \left(\tilde{\omega}_{111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right) + \tilde{\omega}_{2112}^{(s)} \left(\tilde{\omega}_{221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right) - \left(\tilde{\omega}_{112}^{(s)} + \tilde{\omega}_{212}^{(s)} \right)^2;$$

$$A_1^{(s)} \tilde{\omega}_{222}^{(s)} \tilde{\omega}_{2112}^{(s)} = \left(\tilde{\omega}_{111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right) \left(\tilde{\omega}_{221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right); \quad \tilde{\rho}^{(s)} \tilde{\omega}_{111}^{(s)} \tilde{\omega}_{221}^{(s)} \tilde{\omega}_{2112}^{(s)} = \tilde{\rho}^{(s)};$$

а для нестисливого

$$2A^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2112}^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2222}^{(s)} + \tilde{q}_{22}^{(s)2} (\tilde{\kappa}_{1111}^{(s)} - \tilde{\varrho}^{(s)} v^2) - 2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} (\tilde{\kappa}_{1122}^{(s)} + \tilde{\kappa}_{1212}^{(s)});$$

$$A_1^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2112}^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{(s)2} (\tilde{\kappa}_{1221}^{(s)} - \tilde{\varrho}^{(s)} v^2); \quad \tilde{q}_{ij}^{(s)} = \delta_{ij} \lambda_i^{(s)} q_i^{(s)}; \quad \tilde{\varrho}^{(s)} = \varrho^{(s)};$$

$\varrho^{(s)}$ — щільність матеріалу елементів багат шарового середовища в природному стані. $\tilde{\omega}^{(s)}$ і $\tilde{\kappa}^{(s)}$ - параметри, що характеризують матеріал елементів багат шарового середовища [1].

Значення функцій $\eta_1^{(s)2}$ і $\eta_2^{(s)2}$ визначають вид рівнянь руху (1) і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Досліджений вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху елементів шаруватого середовища. Проведена оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Отримані необхідні і достатні умови існування кратних коренів характеристичного рівняння.

На основі отриманих результатів проведені чисельні дослідження впливу початкових напружень на значення коренів характеристичних рівнянь та на напружено-деформований стан багат шарового середовища.

Чисельні дослідження виконані в рамках теорії скінчених початкових деформацій для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом і для нестисливого матеріалу з потенціалом типу Бартенєва-Хазановича.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити наступні висновки:

Врахування початкових напружень у рамках лінеаризованої теорії пружності приводить до нових постановок задач про взаємодію деформованих тіл, що істотно відрізняються від постановок класичних завдань теорії пружності.

Початкові (залишкові) напруження істотно впливають на значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан шаруватих конструкцій.

В загальному випадку для стисливих і нестисливих матеріалів існують дозвуківі швидкості руху навантаження, при яких можливе існування дійсних кратних коренів характеристичних рівнянь.

Початкові (залишкові) деформації суттєво впливають на значення коренів характеристичних рівнянь особливо при дозвуківих швидкостей руху навантаження.

При відповідних значеннях швидкостей навантаження вплив початкових напружень на значення коренів характеристичних рівнянь може значно зменшуватись або збільшуватись.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: “А.С.К”, 2004. – 672 с.

ДЕКОМПОЗИЦІЯ ТА ПАРАЛЕЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ ДЛЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Паралельні обчислення ґрунтуються на тому, що великі задачі можна розділити на кілька менших, кожна з яких можна розв'язати незалежно від інших. Вони трактуються як варіант об'єднання різних дискретизаційних методів чи ітераційних розв'язувачів для великомасштабних систем добре пристосованих для паралелізації.

Робота присвячена побудові об'єднаного підходу МГЕ та МСЕ на основі методу декомпозиції області (МДО) для контактної задачі теорії пружності.

Розглядається задача про контакт двох пружних тіл $\Omega_\alpha \subset R^2$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = \overline{1,2}$ (рис.1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^2 \Omega_\alpha$.

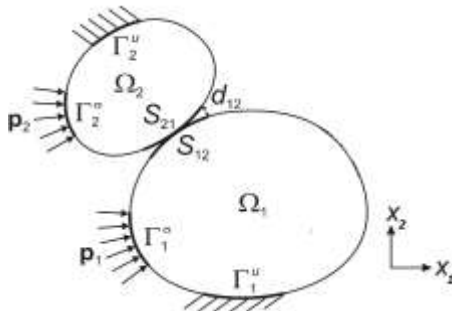


Рис. 1. Контакт двох пружних тіл

Деформації у кожному з тіл виражаються через переміщення за співвідношеннями Коші [1]:

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1,2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha. \quad (1)$$

Напруження та деформації пов'язані законом Гука

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l=1}^2 C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x}), \quad i, j = \overline{1,2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha. \quad (2)$$

Для кожного з тіл виконуються рівняння рівноваги

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad i = \overline{1,2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha. \quad (3)$$

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задані кінематичні крайові умови (умови Діріхле), які для спрощення доведень вважаємо нульовими:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad (4)$$

а на частині Γ_α^σ – статичні крайові умови (умови Неймана):

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \quad (5)$$

де $\mathbf{p}_\alpha = (p_{\alpha\xi}, p_{\alpha\eta}, p_{\alpha n})^T$ – задані граничні зусилля.

Відстань між тілами Ω_α та Ω_β по нормалі [2] до деформації:

$$d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - x'_i)^2},$$

На зонах можливого одностороннього контакту $S_{\alpha\beta}$ виконуються умови:

нерозтягнення

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq 0; \quad (6)$$

відсутності тертя

$$\sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0; \quad (7)$$

взаємного непроникнення тіл

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}); \quad (8)$$

та умова контактної альтернативи

$$(u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') - d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (9)$$

де $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$.

Зазначимо, що задача одностороннього контакту (1), (2), (3) – (9) є нелінійною, оскільки істинні зони контакту є наперед невідомими.

Побудований алгоритм методу декомпозиції області з використанням методу множників Лагранжа, проведена розробка та дослідження адаптивної схеми МСЕ для рівняння теорії пружності для анізотропних об'єктів. Проведено аналіз тестових задач на основі серії обчислювальних експериментів з метою дослідження точності та збіжності побудованих чисельних схем.

1. Dyyak I. Domain Decomposition Schemes for Frictionless Multibody Contact Problems of Elasticity/ Dyyak I., Prokopyshyn I. // Numerical Mathematics and Advanced Applications.-G. Kreiss et al. (eds), 2009.- P.295-303.

2. Avery P. The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces / P. Avery, C. Farhat // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2009. – Vol. 198. – P. 1673–1683.

В.С. Гончарук, А.Є. Давидок, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха

(Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ,
Національний університет «Львівська Політехніка», Інститут прикладних
проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ,
Інститут механіки і прикладної інформатики Університету Казіміра
Великого в Бидгощі)

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕРМОДИУЗІЇ РОЗПАДНОЇ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ У ДВОФАЗНІЙ СТОХАСТИЧНО НЕОДНОРІДНІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ

Нестационарні взаємозв'язні процеси тепло- і вологоперенесення значно впливають на теплотехнічні та міцнісні характеристики захисних частин будівель. Інтенсифікація чи зниження фізико-хімічних перетворень у конструктивних елементах можуть суттєво впливати на їх властивості та структуру приграничних шарів. Тому дослідження процесів тепломасоперенесення та визначення взаємозв'язаних нестационарних полів температури і концентрації є однією з актуальних проблем математичного моделювання. У роботі на основі математичної моделі, побудованої за континуально-термодинамічним підходом, досліджено термодифузійні процеси з урахуванням розпаду мігруючої речовини у двофазній стохастично неоднорідній смузі.

Розглянуто взаємозв'язані процеси теплопровідності і дифузії домішки, що супроводжуються розпадом мігруючих частинок, у смузі товщини z_0 , яка містить випадково розташовані підшари двох типів – матриці і включень. Прийнято, що фази в тілі розташовані за рівномірним законом розподілу, а об'ємна частка матриці є набагато більшою за об'ємну частку включень. Нехтуючи конвективною складовою, концентрація домішки $c^{(j)}(z, t)$ та температурне поле $T^{(j)}(z, t)$ ($j = 0; 1$) в області матриці Ω_0 визначається із системи рівнянь [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial c^{(0)}(z, t)}{\partial t} &= D_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}(z, t)}{\partial z^2} + D_T^{(0)} \frac{\partial^2 T^{(0)}(z, t)}{\partial z^2} - \lambda c^{(0)}(z, t), \\ \frac{\partial T^{(0)}(z, t)}{\partial t} &= \kappa_c^{(0)} \frac{\partial^2 c^{(0)}(z, t)}{\partial z^2} + \kappa_0 \frac{\partial^2 T^{(0)}(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_0, \quad t \in [0; \tau]\end{aligned}$$

а в області Ω_1 – з аналогічної системи з відповідними коефіцієнтами

$$\begin{aligned}\frac{\partial c^{(1)}(z, t)}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 c^{(1)}(z, t)}{\partial z^2} + D_T^{(1)} \frac{\partial^2 T^{(1)}(z, t)}{\partial z^2} - \lambda c^{(1)}(z, t), \\ \frac{\partial T^{(1)}(z, t)}{\partial t} &= \kappa_c^{(1)} \frac{\partial^2 c^{(1)}(z, t)}{\partial z^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 T^{(1)}(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_1, \quad t \in [0; \tau].\end{aligned}$$

Тут D_0 , D_1 і κ_0 , κ_1 - коефіцієнти дифузії і температуропровідності в областях Ω_0 та Ω_1 , $D_T^{(0)}$, $D_T^{(1)}$ і $\kappa_c^{(0)}$, $\kappa_c^{(1)}$ - коефіцієнти взаємозв'язку полів температури і концентрації, λ - коефіцієнт інтенсивності розпаду домішки.

На границях тіла підтримуються сталі значення концентрації домішкової речовини та температури:

$$c(z, t)|_{z=0} = c_*, \quad c(z, t)|_{z=z_0} = 0; \quad T(z, t)|_{z=0} = T_*, \quad T(z, t)|_{z=z_0} = T^*,$$

а початкові умови є наступними:

$$c(z, t)|_{t=0} = 0, \quad T(z, t)|_{t=0} = T^*.$$

Крім того, прийнято ідеальні умови контакту для температури і неідеальні для концентрації.

Трактуючи неоднорідність середовища як внутрішні джерела, вихідну контактну-крайову задачу зведено до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок якої побудовано методом послідовних наближень у вигляді рядів Неймана. Знайдено розрахункові формули для визначення усереднених полів концентрації розпадних

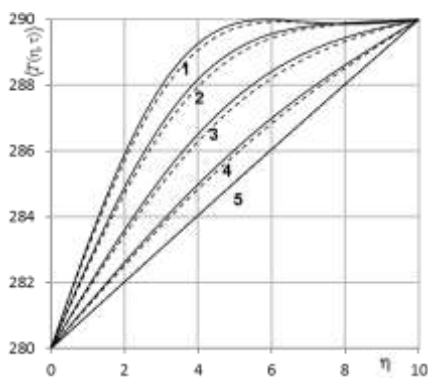


Рис.1. Температура тіла в різні моменти часу

частинок та температури для двофазної багат шарової смуги з рівномірним розподілом фаз. Розроблено програмні модулі для розрахунку усереднених температури тіла і концентрації розпадної домішки в однорідному шарі та двофазній шаруватій смугі з рівномірним розподілом включень.

На рис.1 наведено розподіли усередненої температури у різні моменти безрозмірного часу при охолодженні поверхні (криві 1-5

відповідають зростанню τ). Проведено числовий аналіз залежності усереднених полів концентрації і температури від різних значень параметрів середовища.

1. Чапля Є.Я. Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах / Є.Я. Чапля., О.Ю. Чернуха., В.Є. Гончарук, А.Р. Торський. – Львів: Євросвіт, 2010. – 261 с.

В.М. Горлач^{}, І.В. Клименко^{*}, Г.А. Шинкаренко^{***}*

(^{} Львівський національний університет імені Івана Франка,
^{**} Політехніка Опольська)*

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ ПОШИРЕННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ У ДИСИПАТИВНІЙ РІДИНІ

У роботі [1] авторами обґрунтовано математичну модель та сформульовано відповідну варіаційну задачу стосовно невідомих вектора зміщень $\mathbf{u}$ та температури θ , що описує поширення акустичних хвиль у в'язкій теплопровідній рідині з урахуванням зв'язаності механічних і температурних полів:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \theta_0 \in G, (l, z) \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \times G'); \\ \text{знайти пару } (\mathbf{u}, \theta) \in L^2(0, T; \mathbf{V} \times G) \text{ таку, що} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - b(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ s(\theta'(t), g) + k(\theta(t), g) + b(g, \mathbf{u}'(t)) = \langle z(t), g \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, a(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\theta(0) - \theta_0, g) = 0 \quad \forall g \in G. \end{array} \right. \quad (1)$$

Вжиті вище білінійні форми та лінійні функціонали мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} [2\eta e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})] dx, \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho c^2 \gamma^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx, \quad b(g, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho c^2 \gamma^{-1} \alpha g \nabla \cdot \mathbf{v} dx, \\ s(\theta, g) := \int_{\Omega} \rho c_v \theta_0^{-1} \theta g dx, \quad k(\theta, g) := \theta_0^{-1} \int_{\Omega} \chi \theta_{,i} g_{,i} dx, \\ \langle l, \mathbf{v} \rangle := \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i ds, \quad \langle z, g \rangle := \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \hat{q} g ds, \end{array} \right.$$

де фізичними характеристиками рідини є густина ρ , коефіцієнти теплоємності при постійному об'ємі c_v та при постійному тиску c_{π} , $\gamma = c_{\pi} / c_v$, коефіцієнт теплопровідності χ , швидкість звуку c , коефіцієнт температурного розширення α , коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості η та ζ відповідно, а лінійні неперервні функціонали l та z описують зовнішні джерела надходження механічної та теплової енергії.

Застосування класичної процедури Гальоркіна напівдискретизації за просторовими змінними приводить до розгляду варіаційної задачі (1) у скінченновимірних просторах

$$\begin{cases} \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}, \quad G_h \subset G \quad \forall h > 0, \\ \dim \mathbf{V}_h = N = N(h) \rightarrow \infty, \quad \dim G_h = M = M(h) \rightarrow \infty, \quad \text{if } h \rightarrow 0, \end{cases}$$

та подання шуканих наближень як розкладів за базисними функціями

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\theta}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^M \vartheta_k(t) \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Для відшукування невідомих $\mathbf{U}(t) = \{u_k(t)\}_{k=1}^N$ та $\boldsymbol{\Theta}(t) = \{\vartheta_k(t)\}_{k=1}^M$ одержано задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{U}''(t) + \mathbf{A}\mathbf{U}'(t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(t) - \mathbf{B}\boldsymbol{\Theta}(t) = \mathbf{L}(t), \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Theta}'(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\Theta}(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{U}'(t) = \mathbf{Z}(t) \quad \forall t \in (0, T], \\ \mathbf{M}\mathbf{U}'(0) = \mathbf{Y}^0, \quad \mathbf{A}\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0, \quad \mathbf{S}\boldsymbol{\Theta}(0) = \boldsymbol{\Theta}^0. \end{cases} \quad (2)$$

де матриці $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$ та вектори $\mathbf{L}$, $\mathbf{Z}$ обчислені за виразами для білінійних форм та лінійних функціоналів ($\mathbf{M} = \{m(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{i,k=1}^N$ тощо).

На основі процедури Петрова-Гальоркіна з покроковою частинами квадратичною апроксимацією зміщень і частинами лінійною апроксимацією температури побудовано [1] однокрокову рекурентну схему (ОРС) інтегрування задачі Коші (2) за часом

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } \{\dot{\mathbf{U}}^0, \boldsymbol{\Theta}^0\}, \Delta t > 0, \gamma \in [0, 1], \beta \in [0, 1]. \\ \text{Знайти } \left\{ \ddot{\mathbf{U}}^{j+\frac{1}{2}}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}^{j+\frac{1}{2}} \right\} \text{ та } \left\{ \mathbf{U}^{j+1}, \dot{\mathbf{U}}^{j+1}, \boldsymbol{\Theta}^{j+\frac{1}{2}} \right\}, \text{ такі що} \\ \left\{ \mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{C} \right\} \ddot{\mathbf{U}}^{j+\frac{1}{2}} - \Delta t \gamma \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\Theta}}^{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{L}(t_{j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{A} \dot{\mathbf{U}}^j - \mathbf{C}[\mathbf{U}^j + \Delta t \gamma \dot{\mathbf{U}}^j] + \mathbf{B} \boldsymbol{\Theta}^j, \\ -\mathbf{B}^T \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{j+\frac{1}{2}} + \{\mathbf{S} + \Delta t \gamma \mathbf{K}\} \dot{\boldsymbol{\Theta}}^{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{Z}(t_{j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{K} \boldsymbol{\Theta}^j - \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{U}}^j, \\ \dot{\mathbf{U}}^{j+1} = \dot{\mathbf{U}}^j + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{j+\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{U}^{j+1} = \mathbf{U}^j + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{\mathbf{U}}^j + \dot{\mathbf{U}}^{j+1}), \\ \boldsymbol{\Theta}^{j+1} = \boldsymbol{\Theta}^{j+1} + \Delta t \dot{\boldsymbol{\Theta}}^{j+\frac{1}{2}} \quad j = 0, 1, \dots \text{ доки } j \Delta t < T. \end{array} \right.$$

Для аналізу стійкості ОРС використано рівняння балансу енергії дискретизованої задачі і подано достатній критерій безумовної її стійкості. Апроксимативність ОРС охарактеризовано апостеріорними оцінками похибок, які з огляду на теорему Лакса-Філіпова, визначають порядки швидкості збіжності пропонованої схеми.

Проаналізовано ряд тестових та модельних задач.

1. Горлач В. Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини / В. Горлач, І. Клименко, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2012. – Вип. 18. – С. 76-95.

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІСІ ЗМІШАНОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТІ З РОЗІМКНУТИМ ЛІПШИЦЕВИМ КОНТУРОМ.

Нехай $\Omega_+ \subset R^2$ деяка обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ . $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. S - розімкнута двостороння ліпшицева крива з кінцями c_1 та c_2 , $\overline{S} = S \cup \{c_1, c_2\}$. Вважаємо, що $\overline{S} \subset \Omega_+$. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \overline{S}$, $[\gamma_{i,S}] = \gamma_{i,S}^+ - \gamma_{i,S}^-$, $i = 0, 1$, де $\gamma_{0,S}^\pm$ - оператор сліду з різних сторін S , а $\gamma_{1,S}^\pm$ - оператор сліду нормальної похідної.

Розглянемо наступну задачу в області Ω (задача M):
знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L) = \{u \in H^1(\Omega) : Lu \in L_2(\Omega)\}$ таку, що

$$Lu = -\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$[\gamma_{1,S}]u = 0, \quad \lambda[\gamma_{0,S}u] + \gamma_{1,S}^+u = f, \quad \lambda \in C(\overline{S}), \quad f \in H^{-1/2}(S)$$

$$\gamma_{0,\Sigma}^+u = g, \quad g \in H^{1/2}(\Sigma)$$

Для функцій $u \in H^1(\Omega, L)$ та $v \in H^1(\Omega)$ в області Ω маємо першу формулу Гріна

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} = (Lu, v)_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_{1,S}^+u, [\gamma_{0,S}]v \rangle + \langle [\gamma_{1,S}]u, \gamma_{0,S}^-v \rangle + \langle \gamma_{1,\Sigma}^+u, \gamma_{0,\Sigma}^+v \rangle,$$

з якою впливає наступне твердження.

Теорема 1. Якщо $\lambda \in C(\overline{S})$, $\lambda(x) > 0$, $x \in \overline{S}$, то задача M з однаковими граничними умовами має лише тривіальний розв'язок.

Позначимо $Q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$. Для функції $u \in H^1(\Omega, L)$ з умовами $Lu = 0$ та $[\gamma_{1,S}]u = 0$ вірне наступне інтегральне подання:

$$u(x) = W\tau(x) + V_\Sigma\mu(x), \quad (1)$$

де $\tau = [\gamma_{0,S}]u$ та $\mu = [\gamma_{1,\Sigma}]u$,

$$W\tau(x) = \int_S \frac{\partial Q(x, y)}{\partial n_y} \tau(y) ds_y, \quad V_\Sigma\mu(x) = \int_\Sigma Q(x, y) \mu(y) ds_y.$$

Використавши граничні умови задачі M , для знаходження невідомих τ та μ отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda\tau + H\tau + \gamma_{1,S}^+ V_{\Sigma}\mu = f, \\ \gamma_{0,\Sigma}^+ W\tau + K_{\Sigma}\mu = g, \end{cases} \quad (2)$$

де $H\tau = \gamma_{1,S}^+ W\tau$ - інтегро-диференціальний оператор із сингулярною особливістю, визначений на S , а $K_{\Sigma}\mu = \gamma_{0,\Sigma}^+ V_{\Sigma}\mu$ - інтегральний оператор з логарифмічною особливістю, визначений на Σ .

Граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару для достатньо гладкої функції τ можна отримати в наступному вигляді:

$$\gamma_{1,S}^+ W\tau(x) = - \int_S \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial s_x \partial s_y} \tau(y) ds_y, \quad (3)$$

де інтеграл ми розуміємо як граничне значення нормальної похідної при прямуванні точки x до S . З врахуванням умов $\tau(c_1) = \tau(c_2) = 0$ вираз (3) можна записати у вигляді

$$\gamma_{1,S}^+ W\tau(x) = \int_S \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x} \frac{d\tau(y)}{ds_y} ds_y,$$

де $\bar{s}_x$ - дотична до S в точці x .

Теорема 2. Задача M є еквівалентною системі (2), тобто розв'язок задачі M має вигляд (1), де τ та μ є розв'язками системи (2), і навпаки, функція $u(x)$, що задана виразом (1), де τ та μ - розв'язки системи (2), є розв'язком задачі M .

Наслідок 3. Якщо $\lambda \in C(\bar{S})$, $\lambda(x) > 0$, $x \in \bar{S}$, то система (2) для $f = 0$ та $g = 0$ має лише тривіальний розв'язок.

Для наближеного розв'язування системи рівнянь (2) застосовано метод колокації з використанням в якості базисних функцій граничних елементів по кривих S та Σ . Відзначимо, що у випадку граничних елементів нульового порядку суттєво сингулярні інтеграли, які виникають в процесі обчислення нормальної похідної потенціалу подвійного шару (оператор H), можна отримати в явному вигляді. В результаті дискретизації отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з діагональним переважанням, що свідчить про стійкість запропонованого алгоритму. Розглянуто модельні та практичні задачі у випадку стаціонарної теплопровідності з врахуванням умов неперервності теплового потоку через розіркнутий контур.

І.І. Дяк, М.Ф. Копитко*, Х.Р. Погранична***

(* Львівський національний університет імені Івана Франка,

** Львівський національний медичний університет ім. Данила Галицького)

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСТЕСИНТЕЗУ ПЕРЕЛОМІВ НИЖНЬОЇ ЩЕЛЕПИ ТИТАНОВИМИ ПЛАСТИНАМИ

Переломи суглобового відростка нижньої щелепи (СВНЩ) нараховують достатньо велику кількість можливих випадків. Тому для їх надійного лікування використовують різноманітні підходи і фіксуючі пристрої. Однак численні системи фіксації при переломах СВНЩ не завжди забезпечують необхідну надійність при функціональному навантаженні на нижню щелепу (відкушуванні, жуванні тощо). У роботі [1] проведено біомеханічний аналіз остеосинтезу перелому СВНЩ титановою пластиною, яка складається з внутрішньокісткового стержня та накісткової пластини (рис.1, 1) і призначена для проведення остеосинтезу внутрішньоротовим способом під відеоендоскопічним контролем. У даній роботі проведено дослідження напружено-деформованого стану конструкції “суглобовий відросток-пластина” для різних видів навантаження і методів остеосинтезу (рис. 1).



Рис.1. Остеосинтез при переломах СВНЩ: 1) пластиною з внутрішньокістковим стержнем; 2) прямою накістковою пластиною; 3) двома прямими пластинами

Для розв’язування просторової задачі теорії пружності використовується метод скінченних елементів (МСЕ), реалізований у програмному комплексі Comsol Multiphysic. На основі результатів числових експериментів вироблено рекомендації щодо оптимального способу фіксації уламків.

1. Погранична Х.Р. Биомеханический анализ остеосинтеза в области мыщелкового отростка нижней челюсти / Х.Р. Погранична, Р.З. Огоновский, И.И. Дяк // Современный научный вестник. Сер. Медицина. Биологические науки. – 2013. – № 30 (169). – С.92-99.

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ МАЛИМ ПІДПРИЄМСТВОМ ВЗЯТОГО КРЕДИТУ НА МОЖЛИВІ ВИДИ ДІЯЛЬНОСТІ З ВРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ НА ПОТРЕБИ В КРЕДИТАХ

У сучасних умовах результативність підприємницької діяльності стримується не лише зовнішніми для неї чинниками (недостатній розвиток фінансової та грошово-кредитної систем, відсталість законодавчої та нормативної бази, проблемна організація бюджетної та податкової системи тощо), а також і внутрішніми. Серед внутрішніх обмежувачів зазначимо, насамперед, недостатній рівень наукового обґрунтування підприємницьких рішень, що не дозволяє належним чином опрацьовувати стратегію і тактику фінансово-господарської діяльності. І це в першу чергу стосується підприємств малого бізнесу, які повинні оперативно реагувати на потреби ринку і зміну зовнішнього середовища.

Отримання бажаного кредиту може стати для малого підприємства довгим і важким процесом. Проте, ще важливішим є після отримання коштів ефективно їх розподілити так, щоб одержати максимальний прибуток (щоб могли повернути кредит та мати власну вигоду). Тому нами запропонований алгоритм такого розподілу кредитних коштів підприємством, який забезпечує максимальний прибуток у випадку, якщо підприємство має можливість займатися декількома видами діяльності.

Припустимо, що мале підприємство має можливість зайнятися n видами діяльності $D_1, D_2, \dots, D_n$. Для цього підприємство може взяти кредит в розмірі m грошових одиниць, кожна з яких становить s одиниць (наприклад, $m = 10000$, $s = 100$, $m \cdot s = 1000000$ - сума кредиту). При цьому на окремий вид діяльності підприємство може виділити k грошових одиниць, де $0 \leq k \leq m$). Також відомо, що на i -ий вид діяльності потрібно r_i одиниць коштів. В залежності від розміру виділених коштів на той чи інший вид діяльності підприємство отримує відповідний прибуток. Задача полягає в такому розподілі кредиту на види діяльності, за якого величина сумарного прибутку була б найбільшою.

Нехай $g_i(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, - прибуток від виділення x_j , $j = 0, 1, \dots, m$, грошових одиниць коштів на вид діяльності D_i ; x_i - кількість грошових одиниць коштів, що планується виділити на i -ий вид діяльності. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$R = \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \rightarrow \max$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n x_i = m, \quad 0 \leq x_i \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для розв'язання задачі нами використано метод динамічного програмування. При цьому вважаємо, що види діяльності впорядковані за зростанням потреб в кредитних коштах.

Нехай

$$k_i = \sum_{j=1}^i r_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$p_i = \min(m, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Позначимо через $R_i(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, величину прибутку від виділення кредиту в розмірі $x_j = j$, $j = 1, 2, \dots, p_i$, одиниць коштів на перші i види діяльності $D_1, D_2, \dots, D_i$, а через $R_i^*(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, величину прибутку від оптимального (з максимальним прибутком) виділення кредиту в розмірі $x_j = j$, $j = 1, 2, \dots, p_i$ одиниць коштів на перші i види діяльності.

Процес розв'язування задачі нами розбито на n кроків. На першому кроці визначимо величину максимального прибутку від виділення кредиту в розмірі $x_j = j$, $j = 1, 2, \dots, p_1$, одиниць коштів на перший вид діяльності D_1 . На другому кроці визначимо величину максимального прибутку від надання кредиту в розмірі $x_j = j$, $j = 1, 2, \dots, p_2$, одиниць коштів на перші два види діяльності D_1 і D_2 . І т. д. Взагалі, на s -му кроці ($s = 3, 4, \dots, n-1$) визначаємо величину максимального прибутку від виділення кредиту в розмірі $x_j = j$, $j = 1, 2, \dots, p_s$, одиниць коштів на перші s види діяльності $D_1, D_2, \dots, D_s$. На останньому n -му кроці визначаємо величину максимального прибутку від виділення кредиту в розмірі m одиниць коштів на усі види діяльності.

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.

2. Цегелик Г.Г. Математичне програмування: посібник / Г.Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 338 с.

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ МЕТОДОМ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

Розглядається крайова задача

$$y''(x) = f(x, y(x), y(x - \tau(x)), y'(x), y'(x - \tau(x)), y''(x - \tau(x))) \quad (1)$$

$$+ \int_a^b g(x, t, y(t), y(t - \tau(t)), y'(t), y'(t - \tau(t)), y''(t - \tau(t))) dt,$$

$$y^{(i)}(x) = \varphi^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, 2, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де

$$a^* = \min_{x \in [a; b]} (x - \tau(x)), \quad \gamma \in R.$$

Введемо множини точок [1]

$$E_1 = \{x_j \in [a; b]: x_0 = a, x_{j+1} - \tau(x_{j+1}) = x_j, j = 1, 2, \dots\},$$

$$E_2 = \{x_i \in [a; b]: x_i - \tau(x_i) = a, i = 1, 2, \dots\}, \quad E = E_1 \cup E_2.$$

Нехай запізнення $\tau(x)$ – така функція, що множина

$$E = \{a = x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x^{(l)} < b\}$$

скінченна. Визначимо

$$\delta_1 = [a; x^{(1)}], \delta_2 = [x^{(1)}; x^{(2)}], \dots, \delta_{l+1} = [x^{(l)}; b].$$

Розв'язок крайової задачі (1)-(2) будемо вважати такою функцією $y = y(x)$ із множини функцій

$$V([a^*; b]) = \{y(x): y \in C^1[a^*; b], y \in C^2[a; b], y \in C^2[\delta_r], r = 1, 2, \dots, l+1\},$$

яка задовольняє рівняння (1) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (2).

Задамо на $[a; b]$ сітку $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ таким чином, що $E \subset \Delta$. Шукаємо наближений розв'язок задачі (1)-(2) у вигляді інтерполяційного кубічного сплайну $S(y, x)$ дефекту 2 на сітці Δ , що належить множині функцій $V([a^*; b])$.

Для таких сплайнів одержано явне зображення

$$S(y, x) = M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^+ h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j^- h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

де $M_j^+ = S''(y, x_j + 0)$, $M_j^- = S''(y, x_j - 0)$, $y_j = S(y, x_j)$ задовольняють систему

$$\begin{aligned} & h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_jy_{j+1} = \\ & = \frac{h_j h_{j+1}}{6} (h_j M_{j-1}^+ + 2h_j M_j^- + 2h_{j+1} M_j^+ + h_{j+1} M_{j+1}^-), \quad j = \overline{1, n-1}, \\ & y_0 = \varphi(a), y_n = \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

Запропоновано та обґрунтовано ітераційну схему знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) у вигляді послідовності сплайнів (3), досліджено точність апроксимації. Наведено результати чисельних експериментів для модельних крайових задач, які підтверджують теоретичні результати. Метод сплайн-функцій для різних типів крайових задач із запізненням розглядався у роботах [2,3].

1. *Cherevko I., Dorosh A.* Solving boundary value problems for neutral delay integro-differential equations using spline functions // Actual problems of training specialists in ICT. Conference Proceedings.-Sumy, 2013.-Part 2.-P. 226-234.

2. *Nikolova T.S., Bainov D.D.* Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations // Yokohama Math. J. – 1981. – 29, №1. – P.108-122.

3. *Bellen A., Migula G.* Spline approximations for neutral delay differential equations // Revue d'analyse numer. et de theorie de l'approximation. – 1994. – 23, №2. – P.117-125.

СЕМАНТИЧЕСКИЙ ПОИСК В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

В настоящее время актуальным является использование систем дистанционного обучения (СДО), поскольку они позволяют вовлечь в процесс обучения большее количество учащихся и сделать его более доступным [2]. На данный момент существует ряд популярных систем, которыми могут воспользоваться учебные заведения для размещения своих курсов и материалов. В связи с этим возникает потребность корректного поиска по обширному количеству предоставленной для обучения информации (лекции, презентации, аудио учебники, видео уроки и т.д.).

Для поиска в таких системах используют стандартную модель поиска в основе которой заложен лингвистический подход и ряд оценочных синтетических критериев (таких как положение слов на странице) [4]. Эта модель не позволяет учитывать такие явления, как полисемия (одно слово имеет несколько значений) и синонимия слов (несколько слов с одним значением) поскольку они не могут быть распознаны без понимания смысла поискового запроса [1]. В связи с этим возникает проблема увеличения числа нерелевантных (неадекватных, то есть не соответствующих) результатов, выполняемых поисковой системой.

Однако на сегодняшний день существует способ решения этой проблемы с помощью технологии семантической паутины (Semantic Web). Благодаря тому, что семантический поиск осуществляется не только по ключевым словам, но и по контенту, его результаты соответствуют смыслу запроса, а получение некорректных ответов сводится к минимуму. Такой поиск является удобным не только для нахождения информации на всех индексированных Интернет-страницах, но и в более локальных случаях, таких как поиск по конкретному сайту или системе.

Целью работы является проведение исследований для анализа возможности и целесообразности использования технологии семантической паутины для поиска информации в системах СДО.

В результате анализа контента Интернет-документов выяснилось, что число добавляемых в систему материалов постоянно растет. В систематизации подобной информации важную роль играют метаданные (данные о данных). Наличие метаданных и представление поискового запроса с помощью элементов онтологии является необходимым для выполнения семантического поиска. Некоторые СДО при формировании материалов

для обучения изначально предоставляют возможность формирования метаданных. Они могут быть встроенными в сам ресурс, например, в HTML страницы или документы, а могут сохраняться и обновляться независимо от ресурсов. В случае размещения метаданных отдельно от ресурса, сами метаданные преимущественно сохраняются в формате XML [3]. Поиск выполняется путем сравнения метаданных с запросом. Семантические онтологии в поиске могут выполнять такие роли как: определение отношений между понятиями, интеграция экземпляров данных, ориентирование на другие области знаний, сопоставление с другими схемами данных.

Можно также отметить ряд преимуществ получаемых при использовании семантического поиска:

- ✓ больше внимания можно уделять содержанию;
- ✓ не ограничивать поиск только ключевыми словами (это поможет отсеять веб-страницы, которые выводятся в верхней части поисковых систем только на основе ключевых слов а не смысла);
- ✓ получать обобщенный результат из синонимов слова;
- ✓ отбирать близкие по общему контексту документы, даже если они принадлежат к разным предметным областям.

Однако не смотря на все возможности использования технологии семантической паутины в системах СДО необходимо учитывать огромное количество неструктурированных Интернет-документов, которые должны быть семантически размечены для использования семантическими поисковыми системами. Она требует развития проблемно-ориентированных онтологий. Еще одна нерешенная задача – полностью автоматизированный процесс разметки существующих данных [1]. Для ее решения необходимо построить отображение онтологий предметных областей на формальные запросы.

В результате проведенных исследований можно сделать вывод, что использование семантического поиска в СДО будет целесообразным, поскольку, данный поиск позволит не только найти корректный ответ на поставленный запрос, но и предоставит другие материалы курса СДО подходящие по содержанию и тематике.

1. *Басинов А.А.* Семантический поиск: проблемы и технологии / А.А. Басинов, О.В. Демич // Вестник АГТУ Сер. Управление, вычислительная техника и информатика.— 2012.— №1.— С.1— 8.

2. *Кузнецов В.* Web-технологии в образовании. Системы дистанционного обучения в Интернете / В. Кузнецов, А. Баринов // <http://www.e-commerce.ru/ analytics/analytics-part/analytics12.html>

3. *Лапо П.М.* Введение в электронные библиотеки / Лапо П.М., Соколов А.В. // 2005.— 90 с.

4. *Яровиков В.И.* Модель семантического поиска в онтологической базе знаний / В.И. Яровиков, А.Ф.Тузовский // Сер. Интеллектуальные системы и технологии— №4.— С.115— 117.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФУЗІЙНОЇ НЕСТІЙКОСТІ В ТРЬОХКОМПОНЕНТНІЙ СИСТЕМІ ТИПУ РЕАКЦІЯ-ДИФУЗІЯ

Розглядається початково-крайова задача для системи трьох квазілінійних параболічних рівнянь (1), які складають основу математичних моделей багатьох біологічних, хімічних, екологічних і фізичних процесів:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^x D_{ij} \operatorname{grad} u_j \right) + f_i(u_1, u_2, \dots, u_k, M, t), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad t > 0, \quad M \in R^N, \quad N = 1, 2, 3.$$

Тут $f_i(u_1, u_2, \dots, u_k, M, t)$ - задані нелінійні функції і такі, що задача має при будь-яких допустимих значеннях параметрів хоч би один просторово-однорідний стаціонарний стан $(u_i^0, i=1, \dots, k)$; D_{ij} - коефіцієнти власної дифузії ($i = j$) і взаємної дифузії ($i \neq j$).

Розв'язок системи рівнянь (1) розглядається у простих просторових областях Ω : на відріжку $0 < x < L$ або в прямокутнику $0 < x < L_1, 0 < y < L_2$.

На границі області задаються однорідні граничні умови другого роду.

У початковий момент часу визначені початкові значення.

Ця робота присвячена дослідженню дифузійної нестійкості в трьохкомпонентній системі рівнянь типу реакція-дифузія. Вперше визначені під області дифузійної нестійкості в області допустимих значень параметрів моделі. Знайдено області у параметричному просторі, що відповідають нестійкості Тьюрінга (Ω_1) та хвильовій нестійкості (Ω_2).

Виявлено область перетину ($\Omega_1 \cap \Omega_2$) у якій існують обидві нестійкості.

Числовий аналіз системи (1) здійснено в прямокутній області методом змінних напрямків для випадку коли коефіцієнти взаємної дифузії рівні нулю. Числовий розв'язок нестационарних задач підтверджує існування дисипативних структур у вказаних областях.

МИХАЙЛО КОРКУНА – ПЕДАГОГ ТА ВЧЕНИЙ

Народився Михайло Коркуна 8 листопада 1947 року у національно свідомому та мальовничому прикарпатському селі Добрівляни коло міста Стрий. Батько – Дмитро Федорович – ветеринарний лікар, а мати – Анна Ільківна – вихователька дитячого садка. В родині Михайла дві сестри: Надія (1949 р.н.) – випускниця географічного факультету яка вчителює в Яблунівській СШ під Стриєм та Ярослава (1958 р.н.) – випускниця кафедри економічної кібернетики, яка працює в ОЦ Стрийського вагонно-ремонтного заводу. Михайло постійно опікувався молодшими сестрами та допомагав чим міг.

В 1954-1960 роках навчався у Добрівлянській восьмирічній школі, а з 1960 року - в СШ №10 міста Стрия. У 1965-1970 роках навчається у Львівському державному університеті імені Івана Франка на механіко-математичному факультеті. Спеціалізувався по обчислювальній математиці. За державним направленням скеровується на роботу на посаду інженера Обчислювального Центру нашого університету, де практично набув досвіду програміста. Тоді й починається повноцінне трудове життя Михайла Дмитровича Коркуни.

Трудова діяльність Михайла переривається на три роки службою у війську на посаді командира взводу з 1971 по 1973. Військова частина базована у Володимирі-Волинському. Після демобілізації в 1973 році повертається на роботу старшого інженера ОЦ.

Із 1974 року починається нова сторінка в житті Михайла Дмитровича. Його запрошують на викладацьку роботу на кафедру обчислювальної математики на посаду асистента. Фактично, в ті часи, на викладацьку посаду запрошувались працівники ОЦ, який був кузнем програмістів. В 1979 році переобирається на ту ж посаду.

Переломним в житті Михайла став 1977 рік. Тут й одруження з Ярославою Осипівною з родини Мельник та вступ в заочну аспірантуру. Науковий керівник - доцент кафедри диференціальних рівнянь Василь Григорович Костенко. В щасливому шлюбі народилися сини подружньої пари: Андрій (1977 р.н.) – нині асистент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів та Дмитро (1984 р.н.) – кандидат економічних наук, працівник львівського філіалу німецької фірми «Клінстор».

Свою наукову та методичну роботи Михайло Дмитрович розпочинає в ОЦ і продовжує на кафедрі. Це розв'язування задачі Діріхле для рівнянь

Лапласа в багатозв'язних областях методом динамічного програмування, розв'язування нелінійної задачі теплопровідності при інтенсивному нагріві і конвективному теплообміні, розв'язування крайових задач нелінійної теплопровідності, розв'язування плоскої крайової задачі для системи рівнянь теплопружності, чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь методом Боголюбова-Крилова та оцінка похибки методу.

Фіналом наукових досліджень стає успішний захист кандидатської дисертації з обчислювальної математики на тему *«Про наближені розв'язки крайових задач для еліптичних систем рівнянь та задач нелінійної теплопровідності»* на Вченій раді Київського державного університету імені Тараса Шевченка в червні 1983 року.

Поряд з науковими дослідженнями Михайло активно займається розробкою методичних матеріалів з програмування, що було важливим на той час при відсутності належної кількості та якості навчальної літератури. Це в співавторстві з працівниками кафедри курси: «Електронні обчислювальні машини і програмування», «Програмування на Фортрані в системі ДОС/ЄС ЕОМ», «Методичні вказівки до математичного забезпечення ЕОМ Мінск-22», «Методичні вказівки до програмування на мові Асемблера», «Методичні вказівки до використання мови Асемблера для організації логічної системи введення/виведення в операційній системі ОС ЕС»

В 1984 році Михайла Дмитровича обирають на посаду доцента кафедри обчислювальної математики.

Протягом часу роботи доцент Коркуна читав лекційні курси, проводив практичні та лабораторні заняття, керував виконанням курсових, дипломних та магістерських робіт, педагогічними та виробничими практиками, підготовляв студентів до виступів на наукових конференціях. До викладацької роботи відноситься надзвичай професійно та відповідально. Користувався заслуженим авторитетом як у колег по роботі так й серед студентів. В останні роки розробив та впровадив лекційний курс «Бази даних та інформаційні системи» для студентів прикладної математики та інформатики, лабораторний курс «Основи інформатики» для студентів юридичного факультету та завдання на навчальну практику для студентів факультету міжнародних відносин.

Новим етапом в житті Михайла Дмитровича стала адміністративна робота. Починаючи з лютого 1987 року й до січня 2008 року Михайло – заступник декана факультету прикладної математики та інформатики. До нових обов'язків відноситься надзвичай професійно, відповідально та добросовісно. Працює без зайвих слів та піару. При ньому декан факультету (проф. Гриліцький Д.В., доц. Бартіш М.Я. та проф. Савула Я.Г.) могли більше часу приділяти глобальним питанням життя факультету, бо локальні питання вирішувались в основному Михайлом Дмитровичем.

Після захисту кандидатської дисертації Михайло продовжує активно займатись науковими дослідженнями. В наступні роки опубліковує статті дисертаційної тематики: про одну задачу теплопровідності з рухомим джерелом тепла, про практичну ефективність розв'язування плоских краєвих задач для системи рівнянь еліптичного типу за допомогою методики Я.Б.Лопатинського, неперервна залежність розв'язків краєвої задачі для системи рівнянь теплопружності від граничних умов, використання методу сумарної апроксимації для розв'язування нелінійних задач теплопровідності, чисельне розв'язування задачі теплопровідності методом сумарної апроксимації, застосування методу сумарної апроксимації для розв'язування нелінійної задачі теплопровідності, швидкість збіжності різницьових схем методу сумарної апроксимації в класі з $W_2^{1,0}(Q_T)$, дослідження швидкості збіжності методу сумарної апроксимації в класі з $W_2^{1,0}(Q_T)$.

З бігом часу розширюється тематика наукових досліджень: паралельний алгоритм для рівняння теплопровідності, розпаралелювання локально-одномірної схеми для хвильового рівняння, аналітико-числовий підхід до розрахунку напружено деформованого стану товстих ортотропних плит, напружено деформівний стан мікронеоднорідних пластин з тріщинами, двовимірна задача теорії пружності анізотропного тіла для прямокутної області, метод визначення напруженого стану прямокутних елементів конструкцій під дією силових навантажень, моделювання стохастичного неоднорідного матеріалу з тріщинами, про узагальнення класичної механіки руйнування однорідних матеріалів, локальні напруження в ортотропній пластині з тріщиною- подібним ефектом, подвійно-періодична задача для пластин з двома рівними прямолінійними тріщинами в прямокутній ґратці періодів. Фактично іде підготовка до захисту докторської дисертації. Але не судилося...

Одночасно ведеться методична робота: друкується курс лекцій «Бази даних та системи керування базами даних», «Основні послуги Internet», «ACCESS».

В підручнику «Інформатика. Комп'ютерна техніка. Комп'ютерні технології» видавництва «Каравела» окремий розділ присвячений базам даних належить перу Михайла Дмитровича. Підручник перевидавався тричі.

Були сміливі плани на майбутнє. Але доля розпорядилась інакше...

Тривалі хвороби завершили земне життя Михайла Дмитровича 28 грудня 2013 року. Відійшла у вічність людина порядна, щира, добра, науковець, педагог, працелюб, прекрасний сім'янин, надійний та вірний колега. Відійшла ще завчасно: в розквіті творчих сил і несповнених намірів. Шана й повага до скромного трударя, який залишив нас живих молитися за спасіння його душі.

Хай земля буде йому пухом!

Вічна пам'ять!

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ІННОВАЦІЙНИХ КОШТІВ СЕРЕД СУБ'ЄКТІВ ГОСПОДАРЮВАННЯ

Наука, технології та інновації, завжди були основними чинниками розвитку суспільства. Інноваційна підприємницька діяльність забезпечує суб'єктам господарювання конкурентні переваги, зміцнює їх ринкові позиції, сприяє економічному піднесенню держав, що підтримують розвиток інноваційного підприємництва. Інновації є найважливішим ресурсом економічного зростання. Наука, як головне джерело інновацій, проникає в усі економічні процеси. Економічно розвинені країни створюють сприятливе для розвитку інноваційної діяльності середовище, концентрують фінансові ресурси на пріоритетних напрямках науково-технічного розвитку, утворюють певні організаційні форми та структури інноваційного підприємництва, створюють для нього організаційно-правові умови.

У доповіді розглядається використання методу динамічного програмування для розв'язування задачі розподілу інноваційних коштів серед суб'єктів господарювання, за якого сумарна величина прибутку була б максимальною.

Нехай для впровадження новітніх технологій інвестор (держава, банк, фізична особа тощо) має змогу виділити m грошових одиниць інноваційних коштів, обсяг кожної з яких становить s умовних одиниць. Відомо, що ті кошти можуть бути розподілені серед n суб'єктів господарювання $P_1, P_2, \dots, P_n$. При цьому для кредитування одного суб'єкта господарювання інвестор може виділити не більше однієї інвестиції, розмір якої може становити не більше k грошових одиниць коштів, де $k = 1, 2, \dots, m$. В залежності від обсягу інвестування того чи іншого суб'єкта господарювання інвестор одержує певний прибуток. Задача полягає в такому розподілі інноваційних коштів серед суб'єктів господарювання, за якого сумарна величина прибутку була б максимальною.

Для розв'язання поставленої задачі нами розроблено алгоритм методу динамічного програмування

1. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М. : Наука, 1965. – 458 с.

2. Цегелик Г.Г. Математичне програмування / Г.Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 338 с.

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ, ОПЕРАТОР РЕКУРСІЇ ТА ІМПЛЕКТИЧНІ ОПЕРАТОРИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ БРОЕРА-КАУПА-КУПЕРШМІДТА

Нелінійні динамічні системи відграють вагомую роль у моделюванні явищ природознавства. За останні десятиліття розроблено підходи та алгоритми для знаходження законів збереження, імплектичних операторів та оператора рекурсії [1]. Наявність узгодженої пари імплектичних операторів та оператора рекурсії свідчить про наявність нескінченної ієрархії нетривіальних законів збереження, а як наслідок про повну інтегровність нелінійної динамічної системи.

Нехай на нескінченновимірному многовиді задано нелінійну динамічну систему Броера-Каупа-Купершмідта [2]

$$w_t = \left\{ \begin{array}{l} u_t = \frac{1}{2} v_x - 2uv_x \\ v_t = \frac{1}{2} u_{xxx} - 2(uv)_x \end{array} \right\} = K[u, v] = K[w], \quad (1)$$

де K – функціонально-поліноміальне векторне поле гладке за Фреше.

Теорема 1. Нелінійна динамічна система (1) володіє нескінченною ієрархією нетривіальних законів збереження, перші чотири із них мають вигляд

$$\gamma_0 = \int_{x_0}^{x_0+l} u dx, \gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} v dx, \gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} u v dx, \gamma_3 = \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x_0+l} (4u^2 v - v^2 + u_x^2) dx.$$

Теорема 2. Нелінійна динамічна система (1) володіє узгодженою парою ньотерових імплектичних операторів вигляду

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial & -\partial u \\ -u \partial & \frac{1}{2} \partial^3 - v \partial - \partial v \end{pmatrix},$$

причому система бігамільтонова, тобто її можна подати у вигляді $w_t = -\mathcal{G} \text{grad } H_{\mathcal{G}} = -\eta \text{grad } H_{\eta} = K[w]$, де відповідні Гамільтоніани мають вигляд

$$H_\eta = - \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx, H_g = \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x_0+l} (4u^2 v - v^2 + u_x^2) dx.$$

Теорема 3. Оператор рекурсії, що породжує нескінченну ієрархію інволюційних законів збереження має вигляд

$$\Lambda = \mathcal{G}^{-1} \eta = \begin{pmatrix} -\partial^{-1} u \partial & \frac{1}{2} \partial^2 - \partial^{-1} v \partial - v \\ \frac{1}{2} & -u \end{pmatrix}.$$

1. *Гентош О.С.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах / *О.С. Гентош, М.М. Питула, А.К. Прикарпатський* // – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2006. – 408 с.

2. *Tao Chen* The generalized Broer-Kaup-Kupershmidt System and its Hamiltonian Extension / *Tao Chen, Li-Li Zhu, Lei Zhang* // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5 (76), 2011, p 3767-3780.

ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЛІ-АЛГЕБРАЇЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ З ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Встановлено збіжність узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій та наведено апріорну оцінку похибки апроксимації точного розв'язку.

Розглянемо задачу Коші для лінійної динамічної системи [1]

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x, t) \text{ таку, що} \\ u_t = Ku + f, \\ u|_{t=0} = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

де K – лінійний оператор формальний поліном елементів алгебри Лі $G = \{x, \partial/\partial x, 1\}$. Класичний метод Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій [2] передбачає зведення задачі (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \text{знайти функції } u_n(t) = \{u_j(t)\}_{j=1}^n \text{ такі, що} \\ \frac{du_n(t)}{dt} = K_n u_n(t) + f_n(t), \\ u_n(t)|_{t=0} = \varphi_n, \end{cases}$$

де K_n – скінченновимірне квазізображення оператора K побудоване шляхом інтерполяції Лагранжа.

У [3] запропоновано перейти до еквівалентної задачі

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } v = v(x, t) \text{ таку, що} \\ v_t = Kv + K\varphi + f, \\ v|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

шляхом введення заміни $u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$.

Ввівши позначення $A = \frac{\partial}{\partial t} - K$, $\tilde{f} = K\varphi + f$ у (2), отримуємо задачу для операторного рівняння

$$\begin{cases} \text{знайти елемент } v \in V \text{ такий, що} \\ Av = \tilde{f}, \end{cases} \quad (3)$$

де простір V такий, що $V = \{v \in B : v|_{t=0} = 0\}$.

Застосувавши інтерполяцію Лагранжа отримаємо скінченновимірне формулювання задачі (3) у скінченновимірному просторі V_h

$$\begin{cases} \text{знайти елемент } v_h \in V_h \text{ такий, що} \\ A_h v_h = \tilde{f}_h, \end{cases} \quad (4)$$

де A_h – скінченновимірне квазізображення оператора A , а $\tilde{f}_h$ – скінченновимірне квазізображення $\tilde{f}$.

На підставі теореми Канторовича про збіжність загальної апроксимаційної схеми [4] знайдено оцінку похибки апроксимації точного розв'язку для рівновіддалених вузлів інтерполювання

$$\|v - v_h\|_{V_h} \leq M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_{\infty} + |a_\alpha| \left(\prod_{k=0}^{\alpha-1} (\ln(n_x - k)) \right) \left(\frac{1}{n_x - 1} \right)^{n_x - \alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}} \right\|_{\infty} \right).$$

де число α – максимальний порядок похідної за змінною x в операторі K , M деяка стала, а n_x, n_t – кількість вузлів інтерполяції за відповідними змінними x, t .

Отже, степеневий порядок збіжності узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій забезпечено як для просторової змінної так і для часової змінної, що є вагомим перевагою над класичним методом Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій, де порядок збіжності є степеневим тільки для просторової змінної.

1. Бігун О. Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем / О. Бігун, М. Притула // Мат. вісник НТШ. Т. 1, 2004р. – С. 24 – 31.

2. Митропольский Ю.А. Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики / Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатский, В. Гр. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40 – С. 453–458.

3. Кіндибалюк А.А. Узагальнення схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задач Коші / А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула // XIX Всеукраїнська наукова конференція Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (3 – 4 жовтня 2013р. – Львів). Тези доп. С. 75 – 77.

4. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // М.: Мир, – 1972. – 418 с.

КОМБІНАЦІЯ МЕТОДІВ НЬЮТОНА ТА ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$P(x) = x - \varphi(x) = 0 \quad (1)$$

У випадку коли виконується умова $\|\phi'(x)\| = q < 1$ можна використовувати метод простої ітерації. Однак використання даного методу приводить до значної кількості обчислень, оскільки збіжність методу є лінійна.

Розглянемо метод

$$x_{k+1} = x_k - P \left(\frac{x_k + \varphi_k}{2} \right)^{-1} P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Для послідовності $\{x_n\}$ отриманій за (2) доведено, що збіжність запропонованого методу є не меншою ніж в метода Ньютона, але із меншим знаменником збіжності.

Поряд з цим, нами розглянуто дві модифікації методу (2), а саме

$$\begin{aligned} u_k &= \varphi_k, \\ v_k &= x_k - (P'(x_k))^{-1} P(x_k), \\ x_{k+1} &= \arg \min_{\lambda} f(u_k + \lambda(v_k - u_k)), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

та

$$\begin{aligned} u_k &= \varphi_k, \\ v_k &= x_k - \left(I - \phi' \left(\frac{x_k + u_k}{2} \right) \right)^{-1} (P(x_k)), \\ x_{k+1} &= \arg \min_{\lambda} f(u_k + \lambda(v_k - u_k)), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

де $f(x) = (P(x), P(x))$.

Проведені розрахунки показали ефективність, в сенсі кількості обчислень, методів (3) та (4) в порівнянні з методом (2).

ЗАСТОСУВАННЯ КРИВИХ ЕДВАРДСА ПРИ ОБМІНІ ІНФОРМАЦІЄЮ

Сучасні криптосхеми, побудовані на еліптичних кривих Вейерштрасса, мають хорошу криптостійкість, але досить повільні за рахунок, зокрема, складної групової операції над раціональними точками цієї кривої. Одним із важливих завдань є збільшення швидкодії такої криптосхеми без зменшення її криптостійкості. Для цього є декілька шляхів. Один із них – використання різних форм еліптичної кривої [1].

Розглянемо криптографічну схему, що використовує протокол Діффі-Геллмана, застосований до кільця Z_p та групи точок еліптичної кривої Едвардса. Ця схема описує алгоритм, який можна використовувати для закритого зв'язку при обміні даними по мережі загального користування. Запропонований алгоритм має достатній рівень безпеки при менших в порівнянні з кривими Вейерштрасса обчислювальних затратах.

Щоб здійснити обмін конфіденційною інформацією, абоненти А і В спочатку створюють секретний ключ. Вони відкритими повідомленнями належним чином вибирають просте число p , криву $x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2$ над Z_p , точку C цієї кривої та випадкове число g з поля Z_p . Після узгодження початкових даних А та В відповідно генерують випадкові послідовності (α_1) , (α_2) , (α_3) (абонент А) та (β_1) , (β_2) , (β_3) (абонент В) і незалежно один від одного обчислюють (g^{α_1}) , (g^{α_2}) , $(\alpha_3 C)$, (g^{β_1}) , (g^{β_2}) та $(\beta_3 C)$. За допомогою відкритих повідомлень А та В обмінюються знайденими послідовностями і обчислюють закриті ключі $(k_1) = (g^{\alpha_1 \beta_1})$, $(k_2) = (g^{\alpha_2 \beta_2})$ і $(k_3) = (\alpha_3 \beta_3 C)$. Для створення шифротексту потрібно, наприклад, до записаного за допомогою точок еліптичної кривої початкового тексту додати (k_3) , до перших координат точок отриманої послідовності додати (k_1) , а до других координат точок цієї послідовності додати (k_2) . Такі перетворення оборотні, тому (при відомих ключах) зворотними перетвореннями можна отримати початковий текст.

1. Ashraf M. On the Alternate Models of Elliptic Curves / M. Ashraf, B. B. Kirlar // International Journal of Information Security Science. – 2012. – Vol 1. – No 2. – P. 49 – 66.

ДВОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ ПОТУЖНОСТЕЙ КОМП'ЮТЕРІВ У GRID-СИСТЕМІ

В роботі зроблено математичну постановку та запропоновано алгоритм побудови розв'язку двокритеріальної задачі оптимального використання потужностей комп'ютерів у *GRID*-системі.

З обчислювальної точки зору *GRID*-системи за відповідної організації обчислювального процесу дають змогу за прийнятний час загалом розв'язати два класи задач: задач, в яких можливе паралельне виконання обчислювального процесу, або потоку задач, для яких розпаралелювання неможливе. Можливий варіант одночасного обслуговування *GRID*-системою двох визначених вище типів задач. Тому при управлінні *GRID*-системою постає завдання організації обчислень, що забезпечує їх оптимальний режим.

Наведемо математичне формулювання двокритеріальної оптимізаційної задачі. Нехай, n – кількість доступних вузлів *GRID*-системи; m – загальна кількість задач, що допускають паралельне виконання у вузлах *GRID*-системи; t_{ij} – час, потрібний для розв'язування i -ї задачі у вузлі j ; T_j – час, протягом якого можна використовувати обчислювальні потужності j -го вузла; c_{ij} – затрати на розв'язування i -ї задачі в j -му вузлі *GRID*-системи; $z_{ij} \in \{0,1\}$, де 1 відповідає випадку розв'язування i -ї задачі в j -му вузлі, а нуль в протилежному випадку. Тоді задача оптимального використання потужностей *GRID*-системи полягає в такому розподілі задач між вузлами системи, щоб забезпечити одночасно мінімальний час розв'язування всіх обчислювальних задач та мінімальні затрати на їх розв'язування.

Математична модель задачі в цьому випадку

$$f_1(z_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} z_{ij} \rightarrow \min; f_2(z_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} z_{ij} \rightarrow \min,$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^m t_{ij} z_{ij} \leq T_j, j = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Для побудови розв'язку сформульованої задачі можемо використати підхід, згідно з яким спочатку можуть бути вказані бажані значення час-

тинних критеріїв (або їх границі). Тоді оптимізаційна задача полягатиме в тому, щоб знайти альтернативу, яка задовольняє цим вимогам, або встановити, що такої альтернативи у множині $\{z_{ij}\}$ не існує і вказати альтернативу, яка підходить до поставленої цілі ближче всього.

Бажані значення критеріїв $\bar{f}_l, l = 1, 2$ задають або точно, або у вигляді верхніх чи нижніх границь. Значення $\bar{f}_l, l = 1, 2$ називають рівнями вимог, а точку їх перетину z_{ij}^* – опорною чи ідеальною точкою. Оптимізаційна задача полягає в побудові послідовності альтернатив $z_{ij}^k, k = 0, 1, 2, \dots$, яка б у границі наближалася до z_{ij}^* .

Згідно з алгоритмом побудови розв'язку, для кожного критерію $\bar{f}_l(z_{ij}), l = 1, 2$ розраховується найбільше і найменше його значення на множині альтернатив $\{z_{ij}\}$:

$$f_l^{\max} = \max_{\{z_{ij}\}} f_l(z_{ij}); f_l^{\min} = \min_{\{z_{ij}\}} f_l(z_{ij}), l = 1, 2.$$

Далі переходять до нормованих критеріїв $w_l(z_{ij}), l = 1, 2$:

$$w_l(z_{ij}) = \frac{f_l^{\max} - f_l(z_{ij})}{f_l^{\max} - f_l^{\min}}, l = 1, 2.$$

На k -му кроці алгоритму на основі аналізу вибираються бажані значення критеріїв: $h_l^k = [f_l^{\min}, f_l^{\max}], l = 1, 2$ і на цій основі розраховуються значення

$$w_l^k = \frac{f_l^{\max} - h_l^k}{f_l^{\max} - f_l^{\min}}, l = 1, 2.$$

Потім обчислюють вагові коефіцієнти нових критеріїв

$$\alpha_l^k = \frac{\prod_{q=1, q \neq l}^2 w_q^k}{\sum_{q=1}^2 \prod_{q=1, q \neq l}^2 w_q^k}, l = 1, 2$$

Ефективна альтернатива z_{ij}^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі $z_{ij}^k = \arg \max_{\{z_{ij}\}} \min_{l=1,2} \alpha_l^k w_l(z_{ij})$.

У знайдений точці z_{ij}^k обчислюється значення всіх критеріїв $(f_1(z_{ij}^k), f_2(z_{ij}^k))$. Якщо цей вектор значень критеріїв задовольняє умову припинення обчислювального алгоритму, то z_{ij}^k – шукана альтернатива; інакше здійснюється перехід на $(k+1)$ -й крок, тобто на основі евристичного аналізу вибираються нові бажані значення критеріїв $h_l^k, l = 1, 2$ і т.д.

**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ НЕЛІНІЙНОСТІ
КОЕФІЦІЄНТА ВОЛОГОПРОВІДНОСТІ НА ЗМІНУ
НАСИЧЕНОСТІ ГРУНТОВОГО МАСИВУ**

Проведено аналіз впливу на насиченість масиву ґрунту нелінійного коефіцієнта вологопровідності, що залежить концентрації сольового розчину та температури ґрунту. При цьому використано математичну модель промочування ґрунтового схилу внаслідок прориву трубопроводу з врахуванням процесів тепло-масопереносу [1].

Числовий розв'язок відповідної крайової задачі знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій [3]. Програмну реалізацію здійснено на мові програмування C#. Експериментальні залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину та температури апроксимовані методом радіальних базисних функцій (як методом апроксимації) [2].

Як показали числові експерименти, використання нелінійного коефіцієнта вологопровідності замість сталого суттєво змінює швидкість поширення вологи в ґрунті. Проте не можна зробити однозначного висновку впливу цього коефіцієнта в силу фізико-механічних властивостей ґрунту, оскільки експерименти по його дослідженню ще тривають. Однак можна стверджувати, що в основному врахування його змінності значно пришвидшує процеси зміни насиченості або поширення вологи у ґрунтовому середовищі. Це безперечно необхідно враховувати в будівництві при проектуванні будівель та споруд, оскільки дозволить точніше розрахувати їх стійкість та опір навантаженням.

1. Gromadchenko T.V. Mathematical Model of Soil Saturation Problem as a Result of Free-Flow Pipeline Damage When Heat and Mass Transfer Processes Exist / T.V. Gromadchenko, P.M. Martyniuk // Обчислювальна та прикладна математика: Матеріали конференції (5-6 вересня 2013). – Київ, 2013. – С. 26.

2. Власюк А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіально-базисних функцій: Монографія. / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.

3. Громадченко Т.В. Математичне моделювання промочування сухого ґрунту в результаті аварії безнапірного водопроводу / Т.В. Громадченко, П.М. Мартинюк, А.В. Пащенко // Вісник ОДАБА. – 2012. – № 48, Ч.1. – С. 103 – 111.

**ВАРІАНТИ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ЗАЛИШКОВО-ВІЛЬНИХ
БУЛЬБАШОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ
З ВЕЛИКИМИ ЧИСЛАМИ ПЕКЛЕ**

Відомо, що стандартні реалізації числових схем методу скінченних елементів (МСЕ) добре зарекомендували себе для розв'язування широкого кола задач механіки конструкцій, аеро- та гідродинаміки, акустики, теплопровідності, дифузії. Проте дослідження задач з очікуваними високими градієнтами розв'язку схеми МСЕ потребують деяких модифікацій.

Для розв'язування збурених задач застосовують спеціально орієнтовані методи, які назвали стабілізаційними методами. Зокрема, до них належить МСЕ з ієрархічним базисом [1], який також відомий як метод hr. У цьому методі, простір пошуку розв'язку розширюється кусково поліноміальними функціями до степеня p .

Існує також інший підхід, що передбачає дворівневу модель методу залишково-вільних бульбашок, вперше запропоновану в [2]. Тут простір, у якому шукається розв'язок, розширюється так званими функціями бульбашками, що апроксимують розв'язок деякої допоміжної задачі. Цей метод також відомий під назвою Residual-free bubble method (RFB). Оскільки допоміжну задачу треба будувати для кожного елемента, для зручності, називатимемо її локальною. На противагу – основну задачу називатимемо глобальною.

У багатьох публікаціях [3] зроблено спроба використання одновимірного аналітичного розв'язку у побудові апроксимації u^b для двовимірної задачі. Такі підходи зазвичай не є гнучкими, оскільки зумовлюють труднощі пов'язані зі знаходженням точного розв'язку локальної задачі.

Більшості з перерахованих методів притаманні і певні недоліки, які мотивують пошук нових підходів для розв'язування локальної задачі, наприклад, в контексті задачі адвекції-дифузії з домінуючою адвекцією.

Стосовно таких задач відомим є факт, що при використанні як V^h простору кусково лінійних чи білінійних функцій, МСЕ дає погане наближення, коли $k \ll |\bar{w}|h$, де k – коефіцієнт дифузії, w – швидкість адвентивного перенесення, h – крок розбиття. Проте такі випадки часто виникають у прикладних задачах моделювання фізичних процесів. У

таких випадках говорять про виникнення фіктивних осциляцій і потребу зменшення h кроку розбиття. Для кількісної оцінки останньої нерівності зручно користуватись відношенням Пекле $Pe = |w|h/k$.

Одним із способів поліпшення результатів є пошук нових шляхів конструювання простору V^h , який і пропонується автором у тому числі в [4].

Використання нової дискретної схеми для методу залишково-вільних бульбашок, передбачає звичні переваги безсіткових методів, а саме: розв'язок u^p має певний запас гладкості, а саме $u^p \in C^p$, а не C^1 як у стандартних методах, що дає змогу адекватно обчислити градієнт; спільною перевагою безсіткових методів є їхня, порівняно зі стандартним МСЕ, ліпша збіжність при застосуванні до несиметричних білінійних форм; якщо степінь апроксимацій сталий для всіх локальних задач, то цей підхід дає змогу сформувати локальну, однакову (з точністю до лінійних множників) для кожного елемента, систему, що значно заощаджує час обчислення.

Аналіз отриманих числових результатів дає підстави стверджувати, що запропонований метод дає можливість проводити розрахунки та отримувати адекватні розв'язки для задач з сітковими числами Пекле, які сягають 10^{10} .

1. Dey S., Shephard M. S., Flaherty J. E. A straightforward structure to construct shape functions for variable p-order meshes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. –1997. – N.147. – P.209-233.
2. Brezzi F., Russo A. Choosing bubbles for advection-diffusion problems // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. –1994. – N. 4. – P.571-587.
3. Asensio M. I., Russo A., Sangalli G. The residual-free bubble numerical method with quadratic elements // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2004. – N.14/5. – P.641-661.
4. Кухарський В., Савула Я., Кривень І. Модифікований метод залишково-вільних бульбашок для розв'язування задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2013. – Вип. 20. – С. 85-94.

ПРО РОЗВИНЕННЯ ЗАПІЗНЮЮЧИХ ПОВЕРХНЕВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ПО ПОЛІНОМАХ ЛАГЕРА

При розв'язуванні мішаних задач для хвильового рівняння запізнюючі поверхневі потенціали використовують як для теоретичного дослідження розв'язків, так і для розробки ефективних методів чисельного моделювання процесів поширення хвиль різної природи. Для нас у даному випадку є важливими дві властивості потенціалів: наявність так званого запізнення – залежності густини від різниці часової і просторової координат (після зведення до безрозмірних величин), і неперервна залежність потенціалу на скінченному часовому проміжку від густини [1]. Стосовно функцій, інтегрованих з квадратом на часовій осі, для врахування запізнення нами побудовано розвинення по поліномах Лагера, коефіцієнтами якого є компоненти перетворення Лагера відповідних функцій, залежних лише від часу. Застосування такого розвинення до густини запізнюючих потенціалів дає змогу перейти до аналогічного розвинення вже самих потенціалів. Його коефіцієнтами є компоненти q -згортки нескінченних послідовностей, отриманих після застосування перетворення Лагера до густини потенціалів і до фундаментального розв'язку хвильового оператора.

За допомогою граничних операторів, які відповідають запізнюючим поверхневим потенціалам, можна отримати граничні інтегральні рівняння (ГІР), еквівалентні мішаним задачам для хвильового рівняння. Розв'язок ГІР неперервно залежить від даних у крайових умовах мішаної задачі [2]. Це дає підстави для використання q -згортки і переходу до нескінченної послідовності інтегральних рівнянь з одним і тим же граничним оператором у лівій частині, при цьому права частина кожного з рівнянь рекурентно залежить від розв'язків попередніх ГІР. Такий вигляд інтегральних рівнянь дає змогу побудувати ефективні алгоритми для знаходження компонентів як густин запізнюючих потенціалів, так і узагальнених розв'язків внутрішніх і зовнішніх мішаних задач для хвильового рівняння в довільній області з ліпшицевою межею.

1. *Laliena A.R., Sayas F.J.* A distributional version of Kirchhoff's formula. // J. Math. Anal. Appl. 2009; 359: 197-208.

2. *Lubich C.* On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations. \emph{Numer. Math.} 1994; 67: 365-389.

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial z} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right). \quad (1)$$

Тут $l = 2$ для газу та $l = 1$ для нестисливої рідини; $\alpha \in (0, 2]$ – степінь дробової похідної; $k = k(x, y, z, t)$, $m = m(x, y, z)$ та $h = h(x, y, z)$ коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно; μ – динамічна в'язкість речовини, p_{at} – атмосферний тиск, q – густина відбору, χ – коефіцієнт стисливості газу.

Числова модель базується на методі скінченних елементів в поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому підінтервалі. Дробова похідна $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$ розкладається за схемою Грюн-

вальда-Летнікова: ${}^{GL}D_\tau^\alpha p := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} p(\tau - j\Delta t)$. Оператор

Грюнвальда-Летнікова апроксимується на проміжку $[0, \tau]$ з підінтер-

вальним кроком Δt як ${}^{GL}D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t)$.

В праці на базі методу скінченних елементів запропоновано числову модель фільтрації газу в пористих неоднорідних середовищах із використанням дробових похідних за часом. Розглянуто дробові похідні Капутто та Ріммана-Ліувіля. Проведений числовий аналіз із використанням експериментальних вхідних даних.

1. R. Carmona & M. Ludkovski (2005), "Gas storage and supply guarantees: an optimal switching approach," submitted to Management Science.

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

У роботі схеми апроксимації систем лінійних диференціально-різницьких рівнянь застосовуються для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості розв'язків.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i x(t - \tau_i), \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, A_i , $i = \overline{1, k}$ – $n \times n$ -сталі матриці, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$.

Квазіполіном для системи (1) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \det \left(\lambda E - \sum_{i=0}^k A_i e^{-\lambda \tau_i} \right). \quad (2)$$

Поставимо у відповідність рівнянню (1) за схемою [1-2] систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^k A_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left\lfloor \frac{\tau_i m}{\tau} \right\rfloor, \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu [z_{i-1}(t) - z_i(t)], \quad i = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для характеристичного рівняння системи (3) має місце рівність

$$\Psi_m(\lambda) = \det \left(\lambda E - \sum_{i=0}^k A_i \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{l_i} \right) (\mu + \lambda)^{mm}, \quad (4)$$

а послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mm}} \quad (5)$$

збігається при $m \rightarrow \infty$ до квазіполінома (2) [3].

Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних нулів квазіполінома (2). Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ та $H_m(\lambda)$, згідно рівності (5), збігаються, то нулі характеристичного многочлена (4) можна брати як наближені значення неасимптотичних нулів квазіполінома (2).

Конструктивні алгоритми дослідження стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням на основі аналізу властивостей нульового розв'язку апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь наведено в [2].

Теорема. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $t_0 > 0$ таке, що при всіх $t > t_0$ нульовий розв'язок системи (3) експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх $t > t_0$ нульовий розв'язок апроксимуючої системи (3) експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий).*

Обчислюючи нулі характеристичного рівняння апроксимуючої для (1) системи звичайних диференціальних рівнянь при різних значеннях τ , для яких зберігається стійкість нульового розв'язку апроксимуючої системи, знаходимо область значень запізнення τ для яких система із запізненням (1) є експоненціально стійкою.

У випадку, коли система із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (6)$$

другого порядку, такий алгоритм нескладно реалізувати. Числові експерименти показують, що система (6) із матрицями

$$A = \begin{pmatrix} -0,9 & -6,5 \\ 4,8 & -0,9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1,39 & -0,65 \\ 0,48 & -1,39 \end{pmatrix}$$

буде асимптотично стійкою тоді, коли $\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3)$, де $\tau_1 = 0,2862$, $\tau_2 = 0,7141$, $\tau_3 = 1,2142$.

Одержані результати добре узгоджуються із дослідженням стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням в роботі [4].

1. Cherevko I. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolynomials / I. Cherevko, L. Piddubna // Revue D'Analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – 28, №1. – P. 15-21.

2. Матвій О.В. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість / О.В. Матвій, І.М. Черевко // Нелінійні коливання. – 2004. – 7, №2. – С. 208-216.

3. Матвій О.В. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями / О.В. Матвій, С.А. Пернай, І.М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. – Чернівці, 2010. – Вип. 501: Математика. – С. 69-73.

4. Хохлова Т.Н. Конус устойчивости для линейного матричного дифференциального уравнения с запаздыванием / Т.Н. Хохлова // Вестник Ю.-Ур. ГУ. – 2010. – Вип. 30: Математика, Физика, Химия. – С. 33-37.

(Національний університет водного господарства та природокористування)

**ПРО ВПЛИВ n - КОМПОНЕНТНОГО ХІМІЧНОГО РОЗЧИНУ НА
ПРОЦЕС ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВИХ
ГРЕБЕЛЬ З ВОДОВОДАМИ**

Математична модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву з врахуванням впливу n -компонентного хімічного розчину та неізотермічних умов (рис.1) в загальноприйнятих позначеннях описується крайовою задачею, яка містить наступні рівняння[1-3]:

$$\begin{aligned}
 & 2a_0 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \beta_1(a_0 + a_1) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \beta_1 [\operatorname{div}(\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \nabla h) - \\
 & - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{K}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_T \nabla \mathbf{T})] + \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \nabla h) - \\
 & - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{K}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_T \nabla \mathbf{T})] + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{\rho_i \gamma} \times \\
 & \times \left[\beta_1 \left[\sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right] + \left[\sigma \frac{\partial^2 c_i}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N_i}{\partial t^2} \right] \right], \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, i = \overline{1, n}, \\
 & \Delta h(\mathbf{X}, t) = 0, \mathbf{X} = (x, y) \in \Omega_3, t > 0, \\
 & \operatorname{div}(D_T^{(i)} \nabla \mathbf{T}) + \operatorname{div}(D^{(i)} \nabla c_i) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, \\
 & \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, i = \overline{1, n}, \\
 & \operatorname{div}(D_T^{(i)} \nabla \mathbf{T}) + \operatorname{div}(D^{(i)} \nabla c_i) = 0, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, i = \overline{1, n}, \\
 & \frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_m^{(i)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) - c_i) N_i^{\alpha_i}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, i = \overline{1, n}, \\
 & \operatorname{div}(\lambda \nabla \mathbf{T}) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{T}) = c_T \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, \\
 & \operatorname{div}(\lambda \nabla \mathbf{T}) = 0, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, \\
 & \mathbf{u} - e \mathbf{v} = -\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{K}_T \nabla \mathbf{T}, \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Вищенаведені рівняння доповнюються відповідними початковими та граничними умовами, а також умовами спряження на межах контакту областей з різними фізико-механічними та хімічними характеристиками для невідомих функцій.

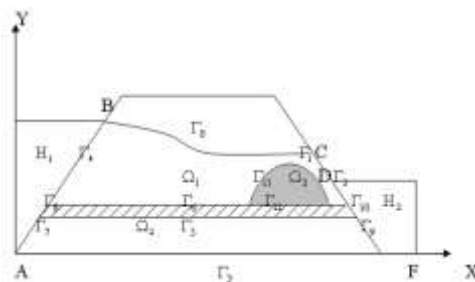


Рис.1. Профіль тіла ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Числове розв'язання вищенаведеної крайової задачі здійснене методом радіальних базисних функцій. Числові експерименти проведено у випадку двох-компонентного хімічного розчину: звичайна кам'яна сіль та гіпс. Результати експериментів показали, що наявність гіпсу не має значного впливу на розподіл надлишкових напорів, оскільки його концентрація в рідкій фазі є дуже малою в порівнянні з концентрацією солі. Сіль здійснює значний вплив на розподіл надлишкових напорів: при наявності солі напори розсіюються повільніше. При наявності солі та гіпсу також відбувається сумарно більше просідання верхньої межі греблі. Тому, нехтування впливом хімічних розчинів при обрахунках реальних задач може призвести до катастрофічних наслідків.

1. Власюк А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій/ А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.

2. Мартинюк П.М. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом / П.М. Мартинюк, Н.В. Медвідь // Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів. Матеріали конференції. – Рівне, 2013. – С.105.

3. Медвідь Н.В. Про задачу фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами / Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Матеріали конференції. – Львів, 2013. – С.94-95.

ОПТИМАЛЬНА ОРГАНІЗАЦІЯ БАГАТОРІВНЕВОГО БЛОКОВОГО ПОШУКУ ЗАПИСІВ У ФАЙЛАХ БАЗ ДАНИХ

Досліджується ефективність методу r – рівневого блочного пошуку у випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до записів. За критерій ефективності приймається математичне сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку запису в файлі.

Розглянемо r – рівневий блочний пошук [2]. Нехай p_i – ймовірність звертання до i – го запису файла. Математичне сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку запису в файлі, виразиться формулою

$$E = \sum_{i_r=1}^{n_r} \sum_{i_{r-1}=1}^{n_{r-1}} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_0=1}^{n_0} (i_r + i_{r-1} + \dots + i_1 + i_0) p_{\varphi(i_0, i_1, \dots, i_r)},$$

де n_i , $i = 1, 2, \dots, r$, – кількість блоків i – го рівня, n_0 – кількість записів в кожному блоці першого рівня,

$$\varphi(i_0, i_1, \dots, i_r) = i_0 + \sum_{j=1}^r (i_j - 1) \prod_{k=0}^{j-1} n_k.$$

Якщо розподіл імовірностей звертання до записів є рівномірний, то для E одержуємо вираз

$$E = \sum_{k=0}^r \frac{1}{2} (n_k + 1).$$

У роботі знайдено значення параметрів n_k , $k = 1, 2, \dots, r$, при яких E досягає мінімуму.

Параметри n_i , $i = 0, 1, \dots, r$, для яких E досягає мінімуму, визначаються за формулою

$$n_i = \sqrt[r+1]{N}, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

При цьому

$$E_{\min} = \frac{1}{2} (r + 1) (\sqrt[r+1]{N} + 1).$$

Отже, r – рівневий блочний пошук називатимемо r – рівневим блочним пошуком з оптимальним розміром блоків на всіх рівнях, якщо на i –

му рівні ($i = 1, 2, \dots, r$) кожний блок розбивається на $n_i = \sqrt[r+1]{N}$ підблоків по $s_i = \sqrt[r+1]{N}$ записів в кожному.

Знайдемо тепер значення r , для якого E_{min} буде приймати найменше значення.

Функція E є опуклою, а тому існує її точка мінімуму. На рис. 1 наведено графік поведінки функції E в околі точки мінімуму $N = 10^9$.

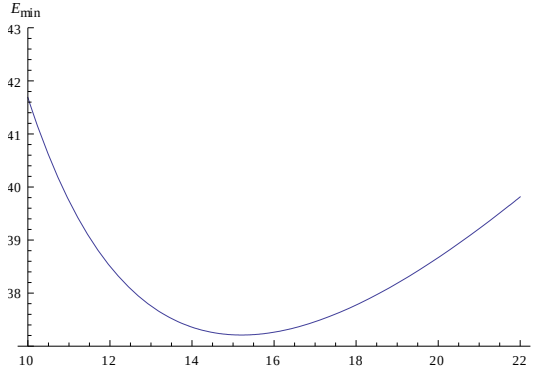


Рис. 1. Графік поведінки функції E в околі точки мінімуму при $N = 10^9$

Неважко переконатися, що E_{min} досягає мінімуму при

$$r = r_{on} = \frac{\ln N}{\ln t_{on}} - 1,$$

де $t_{on} = 3.59112$ – додатний корінь рівняння

$$1 + \frac{1}{t} = \ln t.$$

У табл. 1 з точністю до 0.01 наведено оптимальні значення параметра r_{on} та відповідні їм значення E_{min} для деяких значень N .

Таблиця 1.

	$N=10^4$	$N=10^5$	$N=10^6$	$N=10^7$	$N=10^8$	$N=10^9$	$N=10^{10}$
r_{on}	6.20	8.01	9.81	11.61	13.41	15.21	17.01
E_{min}	16.54	20.67	24.81	28.94	33.08	37.21	41.34

1. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах. М.: Мир, 1980. – 644 с. 2. Цегелик Г.Г. Моделивання та оптимізація доступу до інформації файлів баз даних для однопроцесорних та багатопроцесорних систем: Монографія / Г.Г. Цегелик. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2010. – 192с.

ПОЧАСОВИЙ ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

З використанням принципу спряження та моделювання тонких включень у пружній матриці ефективними граничними умовами стрибків польових величин, здійснено гранично-інтегральний опис у часовій області відклику структури на поширення нестационарних пружних хвиль. Запропоноване формулювання передбачає інтегральні подання розв'язків та зведення відповідних векторних початково-крайових задач до граничних інтегральних рівнянь (ГІР) першого роду із слабосингулярними ядрами хвильового потенціалу у випадку жорстких включень та другого роду із гіперсингулярними ядрами хвильового потенціалу у випадку податливих. Схематично ГІР будуть [1-3]:

$$k_m \Delta f_m(\mathbf{x}, t) + \sum_{m=1}^M \iint_{S_m} \frac{\mathbf{A}[\Delta f_m(\mathbf{y}, t)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS_y = g^{in}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_m, \quad m = \overline{1, M},$$

де $n = 1, 3$, M - кількість включень з пружними характеристиками k_m , розташованих по поверхнях S_m , Δf_m - шукані стрибки переміщень (напружень) на неоднорідностях, $\mathbf{A}$ - оператор лімітованого часового запізнення, g^{in} - відома функція набігаючої перехідної хвилі.

Розроблено універсальний щодо зовнішніх нестационарних впливів маршовий метод числового розв'язання ГІР, який базується на регуляризаційних процедурах, введенні адаптованих сіток граничних елементів для точнішого задоволення умов причинності та аналітичному визначенні інтегралів часової згортки за лінійної часової дискретизації. Ефективність алгоритму продемонстровано встановленими числово історіями актуальних величин для широкого спектру збурень.

1. Михаськів В.В., Калиняк О.І., Грилицький М.Д. Нестационарна задача падіння пружної хвилі на податливе включення у формі еліптичного диска // Мат. Методи та фіз.-мех. поля. - 2012.- Т. 55, № 1. - С. 113-121.

2. Mykhas'kiv V.V., Martin P.A., Kalynyak O.I. Time-domain BEM for 3-D transient elastodynamic problems with interacting rigid movable disc-shaped inclusions // Computational Mechanics. - 2014. - DOI 10.1007/s00466-014-0975-7.

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ОКОЛІ ВТРАТИ СТІКОСТІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо нелінійну варіаційну крайову задачу

$$L(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_*} \left[u_1'(x) + \frac{\lambda}{2} u_2^2(x) \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_*} \left[u_2'(x) + \frac{\lambda}{2} u_1^2(x) \right]^2 dx - \int_{x_0}^{x_*} [p f_1(x) u_1(x) + p f_2(x) u_2(x)] dx \rightarrow \min \quad (1)$$

Ця задача є дуже спрощеною математичною моделлю процесів геометрично-нелінійного деформування тіл. Застосуємо до розв'язання задачі (1) покрокову схему за параметром p . Лінеаризацію нелінійної варіаційної задачі на кроці здійснимо за методом Ньютона. Для розв'язування лінеаризованої варіаційної задачі використаємо метод скінченних елементів. Числову схему побудуємо так, щоб можна було змінювати не тільки крок розбиття за змінною x , але й порядок апроксимації на елементі. Проведено низку досліджень збіжності запропонованого підходу на прикладі задачі, яка має аналітичний розв'язок. Показано, що зростання параметра λ приводить до сповільнення збіжності числового процесу. Тому постає проблема втрати стійкості числового розв'язку такої задачі.

Для дослідження стійкості за Ейлером будемо виходити з другої варіації функціоналу (1). Побудуємо варіаційну проблему на власні значення за приростом Δp . Лінеаризація здійснена в околі розв'язку, отриманого на черговому кроці за параметром p

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_*} \left[\delta u_1'(x) + \lambda \overset{\circ}{u}_2(x) \delta u_2(x) \right]^2 dx + \int_{x_0}^{x_*} \left[\delta u_2'(x) + \lambda \overset{\circ}{u}_1(x) \delta u_1(x) \right]^2 dx + \\ & \lambda \int_{x_0}^{x_*} \left[\overset{\circ}{u}_1(x) + \frac{\lambda}{2} \overset{\circ}{u}_2^2(x) \right]^2 [\delta u_2(x)]^2 dx + \lambda \int_{x_0}^{x_*} \left[\overset{\circ}{u}_2(x) + \frac{\lambda}{2} \overset{\circ}{u}_1^2(x) \right]^2 [\delta u_1(x)]^2 dx = \quad (2) \\ & = -\Delta p \left\{ \lambda \int_{x_0}^{x_*} \left[u_1'(x) + \lambda \overset{\circ}{u}_2(x) u_2(x) \right] [\delta u_2(x)]^2 dx + \lambda \int_{x_0}^{x_*} \left[u_2'(x) + \lambda \overset{\circ}{u}_1(x) u_1(x) \right] [\delta u_1(x)]^2 dx \right\} \end{aligned}$$

Розв'язування варіаційної проблеми на власні значення реалізовано на основі таких самих скінченно-елементних апроксимацій, як і розв'язок нелінійної задачі. Отриману в результаті цього узагальнену алгебричну проблему на власні значення розв'язано за методом ітерацій підпростору. Повна узагальнена проблема малої вимірності, яка виникає на кожній ітерації, розв'язана шляхом зведення до класичної матричної проблеми і далі застосуванням перетворення Хаусхолдера та QL-алгоритму. Розглянуто низку числових прикладів.

*Т.С. Нагірний***, Ю.А. Сеник*, К.А. Червінка****

(*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ

**Зеленогурський університет, Польща

*** Львівський національний університет імені Івана Франка)

ДО ОПИСУ РІВНОВАЖНОГО СТАНУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО НЕФЕРОМАГНІТНОГО ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Методами термодинаміки нерівноважних процесів, механіки деформованого твердого тіла та макроскопічної електродинаміки побудовано модель локально неоднорідного електропровідного неферромагнітного твердого тіла, яка враховує структурну неоднорідність матеріалу та спостережувані особливості реальної поверхні тіла. Процес електропровідності розглянуто в наближенні, прийнятому у [1], а локально градієнтний підхід у термомеханіці [2] розширено на врахування геометричної неоднорідності поверхні.

При моделюванні за вихідні прийнято відомі рівняння балансу повної енергії, енергії електромагнітного поля, балансу імпульсу, ентропії, маси та рівняння Максвелла. Довільно виокремна підобласть тіла розглядається як відкрита термодинамічна система. Вважаємо, що структура матеріалу виникла раптово у початковий момент часу і далі залишається незмінною. Враховано це виокремленням необоротної складової у векторі потоку маси $\vec{j}_m$

$$\vec{j}_m = -g_{mm} \frac{\partial(\vec{\nabla}H)}{\partial\tau}.$$

Тут H – хімічний потенціал, τ – час, g_{mm} – стала.

Лінеаризована система рівнянь моделі, яка описує рівноважний стан, записана на вектор переміщення $\vec{u}$, збурення густини відносно відлікового стану $\rho - \rho_*$, а також термодинамічний електричний потенціал φ має вигляд

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (3\lambda + 2\mu) [a_m \vec{\nabla}(\rho - \rho_*) + a_{\omega} \vec{\nabla} \varphi] &= 0, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{\varepsilon_0} [a_{e\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{\omega\omega} \varphi + a_{m\omega}(\rho - \rho_*)] &= 0, \\ g_{mm} \nabla^2(\rho - \rho_*) - (3\lambda + 2\mu) a_m \nabla^2 \varphi - (\rho - \rho_*) &= -d_{ms}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\vec{u}$ – вектор переміщення, d_{ms} – функція розподілу джерел маси, яка справджує рівняння

$$\int_{(V)} (\rho - \rho_*) dV = \int_{(V)} d_{ms} dV,$$

$\lambda, \mu, a_m, a_\omega, \varepsilon_0, a_{e\omega}, a_{\omega\omega}, a_{m\omega}$ – сталі, (V) – область, яку займає розглядуване тіло.

Приймаємо також, що тіло є електронейтральним, наслідком чого є співвідношення

$$\int_{(V)} \omega dV = 0,$$

у якому ω – електричний заряд, що пов'язаний з кульовою складовою тензора деформації $e \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, збуренням густини та термодинамічним електричним потенціалом лінійним рівнянням стану

$$\omega = a_{e\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{\omega\omega} \rho + a_{m\omega} (\rho - \rho_*).$$

Зазначимо, що третє рівняння системи (1) є наслідком рівняння балансу маси та рівняння рівноваги.

Аналізуючи систему рівнянь (1) бачимо, що при нехтуванні впливом деформації на термодинамічний електричний потенціал, дослідження рівноважного стану електропровідного неферромагнітного пружного тіла зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу на основі взаємозв'язаної системи рівнянь при наступному вивченні напружено-деформованого стану. Якщо ж додатково знехтувати впливом термодинамічного електричного потенціалу на густину, то вивчення рівноважного стану тіла зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу на основі неоднорідних рівнянь Гельмгольца при наступному визначенні напружено-деформованого стану.

Сформульовано також ключову систему рівнянь моделі для випадку, якщо замість вектора переміщення за ключову функцію вибрано тензор напруження.

Запропонована модель є узагальненням моделі, представленої у [3].

1. Буряк Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.
2. Burak Y., Nahirnyj T., Tchervinka K. 2014. Local Gradient Thermomechanics. In: Richard B. Hetnarski (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Reference: 2794–2801.
3. Nahirnyj T., Tchervinka K., 2008. Interface phenomena and interaction energy at the surface of electroconductive solids. Comput. Meth. Sci. Technol. 14, 105.

(*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ,

**Зеленогурський університет, Польща;

*** Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПРИПОВЕРХНЕВА НЕОДНОРІДНІСТЬ У ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНІЙ ТЕРМОМЕХАНІЦІ

У сучасній наномеханіці опрацьовано низку підходів та моделей, що скеровані на опис тіл, вклад поверхневого та об'ємного факторів у енергію яких є співвимірними. Одним з таких підходів є локально градієнтний підхід у термомеханіці [1, 2]. Нижче запропоновано розширення локально градієнтного підходу, спрямоване на коректний опис приповерхневої неоднорідності густини та експериментально спостережуваних розмірних ефектів (у тому числі модулів пружності).

Довільно виокремлена підобласть тіла розглядається як відкрита термодинамічна система. Вважаємо, що структура матеріалу виникла раптово у початковий момент часу і далі залишається незмінною. Враховано це виокремленням необоротної складової у векторі потоку маси $\vec{j}_m$. Приймаємо також, що у початковий момент часу раптово виникає поверхня тіла, неоднорідність густини в околі якої моделюємо джерелами маси.

В рамках моделі відмінність від нуля напружень зумовлена неоднорідним розподілом збурення густини $\rho - \rho_*$ відносно відлікового стану. Розподіл густини описується неоднорідним рівнянням Гельмгольца:

$$\nabla^2(\rho - \rho_*) - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{ms}, \quad (1)$$

де ξ^2 – стала, d_{ms} – функція розподілу джерел маси, яка справджує рівняння

$$\int_{(V)} (\rho - \rho_*) dV = \int_{(V)} d_{ms} dV. \quad (2)$$

і пов'язана із способом формування поверхні тіла.

Вивчення стаціонарного стану термпружного локально неоднорідного твердого тіла у зв'язаній постановці зводиться до послідовного визначення температури на основі класичного рівняння, густини на основі співвідношень (1), (2), та рівняння рівноваги й сумісності деформацій для локально неоднорідного тіла [1, 2].

На прикладі шару (область $|x| \leq l$) показано, що розподілам напружень (рис. 1) та густини властиві два характерні розміри. Один з них

пов'язаний з властивістю матеріалу, тоді як інший – з властивістю реальної поверхні тіла. Величина відношення цих параметрів суттєво впливає на характер розподілу густини та напружень. Врахування джерел маси приводить до якісної та кількісної змін розподілів розглядуваних полів у тонких плівках. У вільному від силового навантаження тілі виникають внутрішні напруження, які однозначно визначаються параметрами матеріалу та поверхні. Їх врахування є важливим при розрахунку експлуатаційних, у тому числі міцнісних, характеристик. Напруження в околі поверхні тіла є розтягуючими, а у глибині — стискаючими. Якщо товщина шару є великою, порівняно із розміром області приповерхневої неоднорідності, внутрішні області шару є практично ненапруженими, а поверхневі напруження близькими до відповідних значень у півпросторі.

В рамках моделі прийнято, що локальні модулі пружності залежать від густини.

Показано, що ефективним модулям пружності (модулю Юнга та коефіцієнту Пуассона) властивий розмірний ефект (рис. 2). Характер ефекту (різні криві на рис.2) визначається характером залежності локального модуля пружності від густини матеріалу.

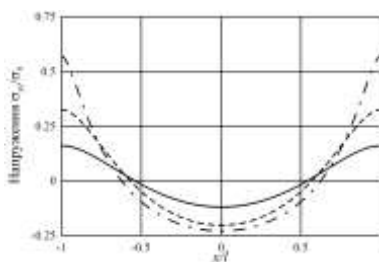


Рис. 1.

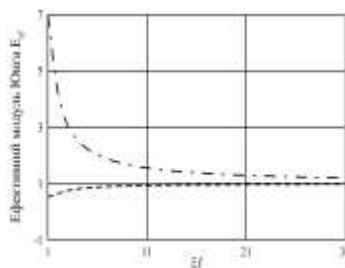


Рис. 2.

Врахування залежності локальних модулів пружності від густини не змінює характеру розподілу напружень та деформацій, однак суттєво впливає на їх величину. Врахування такої залежності є важливим при вивченні експлуатаційних властивостей нанoeлементів.

1. Burak Y., Nahirnyj T., Tchervinka K., 2014. Local Gradient Thermomechanics. In: Richard B. Hetnarski (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Reference: 2794–2801.

2. Нагірний Т.С., Червінка К.А. Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сполом, 2012. – 264 с.

**ВИКОРИСТАННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МОДЕЛЕЙ В
БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ
СТАТИСТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ**

У даній роботі розглядаються постановки задач багатокритеріальної оптимізації з лінійним і квадратичним критеріями якості та описується актуальність розвитку методів параметричної ідентифікації і оптимізації в умовах статистичної невизначеності. Особливе місце займає проблема впливу неправильної ідентифікації невідомих параметрів на стійкість розв'язків оптимізаційних задач. Дана проблема розглянута в контексті зведення вхідної задачі оптимізації до задачі з однією скалярною цільовою функцією за допомогою методів зважених сум та ε – обмежень.

Оптимізацію поставлених задач слід проводити через призму імітаційних та високоточних прогнозних властивостей моделей. Тому в роботі параметрична ідентифікація здійснюється: в рамках дискретно-неперервних моделей з фіктивними змінними для побудови варіантів прогнозних значень; множинної логіт-моделі для визначення оптимального прогнозу [1]. Дискретно-неперервні моделі дозволяють встановлювати стаціонарність чи нестаціонарність часових рядів і знаходити їх прогнозні значення, які є нечутливими до незначних змін вхідної інформації. Отримані високоточні точкові прогнозні значення використовуються при постановці багатокритеріальної задачі оптимізації, що розв'язується класичними методами. У випадку використання інтервальних прогнозів, постановка задачі і методи її розв'язання потребують деякої модифікації.

Апробація побудованих алгоритмів проводиться на статистичних даних фінансових систем. Отримані результати свідчать про ефективність запропонованих підходів.

1. *Назаренко О.М.* Ідентифікація параметрів задачі багатокритеріальної оптимізації інвестиційного портфеля / Назаренко О.М., Карпуша М.В. // Вісник Харківського національного університету. – № 1037, 2012. – С. 82 – 91.

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ З ДОПОМОГОЮ БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Серед багатьох узагальнень ланцюгових дробів особливе місце посідає метод, що зводиться до послідовного застосування деякого матричного оператора до даного вектора. В простішій формі цей метод був розглянутий ще Ейлером, який застосував його до наближеного обчислення виразу $x^{p/q}$, де x – деяке відоме число, p і q – цілі числа.

Цей спосіб Ейлера також було розглянуто Лорі, Крафтом та Мюллером. Але в жодній із цих робіт не йшлося про можливість практичного використання методу. Пізніше Хованський [1] застосував даний метод до знаходження наближеного значення коренів деяких степенів, та відшукування наближених розв'язків поліноміальних рівнянь над полем дійсних чисел.

У даній роботі ідеї викладені в [1] були розвинуті для випадку матричних рівнянь. Зокрема поліноміальне рівняння

$$X^2 + PX + Q = 0, \quad (1)$$

де $X, P, Q \in R^{m \times m}$ пропонується розв'язувати ланцюговими матричними дробами за допомогою рекурентного співвідношення

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{A \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - Q}{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + A + P}. \quad (2)$$

Тут A – матриця, яку вибирають у відповідності до значень коефіцієнтів P, Q рівняння (1).

Показано, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} \approx X$ існує і скінченний. Здійснено програмну реалізацію (2). Проведено ряд чисельних експериментів, що підтверджують ефективність запропонованої схеми.

1. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гос. из-во технико-теоретической лит., 1956.

**ПРОБЛЕМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ
ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ В ЕЛЕКТРОННІЙ ОПТИЦІ**

При дослідженні електромагнітних полів, створюваних зарядженими електродами складної конфігурації, постає необхідність чисельного розв'язування так званих прямих та обернених задач. Їх ще називають задачами аналізу та синтезу [1, 2]. До перших можна віднести проблеми визначення електростатичного поля та його характеристик у будь-якій точці міжелектродного простору за відомими значеннями потенціалів на електродах. До другого типу – проблеми відтворення граничних потенціалів та геометрії поверхонь-електродів за відомими характеристиками поля, що моделюється. Ефективне вирішення цих задач є актуальним при комп'ютерному проектуванні окремих фрагментів сучасних електронно-променевих приладів.

За умови моделювання заряджених електродів відповідними сукупностями розімкнених поверхонь для розрахунку поля доцільним виявився метод інтегральних рівнянь, застосування якого дозволяє понизити розмірність розглядуваної задачі на одиницю. Формулювання початкової проблеми у вигляді інтегрального рівняння, якщо граничні поверхні володіють абелевими групами симетрії скінчених порядків або є так званими канонічними, дає можливість досить природним чином звести останню до послідовності відносно простіших задач. З математичної точки зору розглядувані інтегральні рівняння будуються на основі теорії потенціалу та використанні апарату функцій Гріна. У нагоді стає також декомпозиція областей, де відбувається пошук розв'язків [3].

Оскільки обернені задачі належать до класу некоректно поставлених, їх ефективне розв'язування пов'язане з певними обчислювальними труднощами. Ситуація ускладнюється тим, що при застосуванні методу інтегральних рівнянь виникає необхідність суттєвого врахування сингулярної поведінки шуканої густини розподілу зарядів поблизу контурів розімкнених поверхонь-електродів. У роботі, що пропонується, ми, розв'язуючи одну модельну задачу, шляхом обчислювальних експериментів, досліджуємо можливість ефективного відтворення граничного потенціалу за відомими значеннями в певних точках осесиметричного простору. При цьому забезпечення високої точності наближеного розв'язку початкового інтегрального рівняння та його відтворення за наявності різного рівня збурень заданого поля на осі

симетрії здійснюється методом регуляризації на певним чином обраному компактї [4, 5, 6]. Слід також зауважити, що знайдена таким чином густина розподілу зарядів дозволяє відтворити, в свою чергу, очікуване граничне значення потенціалу. Порівняння останнього із наперед заданим дозволяє зробити висновок про доцільність та вмотивованість запропонованого підходу до розв'язування подібних обернених задач електронної оптики.

1. *Garasym Ya.S.* On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method / *Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin* // *J. Numer. Appl. Math.* – 2003. – Vol. 88, No 1. – Pp. 17-28.

2. *Дорошенко В.М.* Чисельне знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та геометрії граничних поверхонь в задачах теорії потенціалу / *В.М. Дорошенко, Г.П. Коваль, Л.В. Лазурчак* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський національний університет. – 2008. – Вип. 1. – С. 103-112.

3. *Ильин В.П.* Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / *В.П. Ильин, В.А. Камешов, Ю.В. Куликов, М.А. Монастырский.* – Новосибирск: Наука, 1987. – 192 с.

4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы / *Калиткин Н.Н.* – М.: Наука, 1978. – 512 с.

5. *Петров Ю.П.* Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями / *Петров Ю.П., Сизиков В.С.* – СПб.: Политехника, 2003. – 261 с.

6. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* – М.: Наука, 1986. – 288 с.

МЕТОДИ УТОЧНЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНОЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Вивчення швидкості розповсюдження хвиль у різних пористих середовищах дає можливість зробити висновки про природу речовини через яку розповсюджуються хвилі. Дослідження пористих середовищ стосовно наявності в них корисних копалин (газу, нафти, тощо) проводиться, в основному, сейсмо-, магніто-, електро-, гравітаційними, радіометричними та ядерно-геофізичними методами.

Наявність корисних копалин здійснюється на основі аналізу каротажних карт свердловин. Для отримання достовірних і точних результатів каротажу будуються математичні моделі відповідних процесів. Незважаючи на малий крок дискретизації, один вид каротажу свердловин не завжди дозволяє визначити реальні розміри пластів–колекторів корисних копалин, зокрема, газу. Для уточнення результатів є, в основному, два підходи: використання більш складної і точної апаратної частини або уточнення математичних моделей відповідних процесів з введенням і врахування більшої кількості адаптивних параметрів. Принципи геофізичних методів при вивченні надр Землі, особливості якісної та кількісної інтерпретації, а також системний підхід до геофізичних досліджень, основ петрофізики описані в [1, 3, 6].

Встановлено, що створене у земній корі зовнішнє електричне поле сприяє підвищенню інформативності сейсмічних досліджень [4, 6]. Параметри механічних коливань, які спричинюються електричним полем, пов'язані як із структурними, так і з фізико-механічними характеристиками пористого тіла [2, 4, 5]. Це дає можливість з допомогою електро-сейсмічних досліджень отримувати додаткову інформацію про такі важливі параметри середовища, як проникність, пористість, звивистість тощо.

Метою роботи є дослідження моделі механоелектромагнітних хвиль у пористому насиченому розчином електроліту середовищі під дією зовнішнього електричного поля.

Розглянуто статичтно однорідне та ізотропне пористе середовище, віднесене до декартової системи координат (x, y, z) . Матеріал скелету – неферомагнітний діелектрик. Порова рідина – розчин електроліту. Пористість відкрита. У середовищі, яке статистично однорідне та ізотропне, зовнішніми джерелами створено однорідне

постійне електричне поле. Механоелектромагнітні хвильові процеси описуються з допомогою диференціальних рівнянь в частинних похідних [5]. Досліджено вплив зовнішнього електричного поля на параметри механоелектромагнітних хвиль у пористому насиченому розчином електроліту середовищі.

Встановлено, що амплітуда цього поля визначає величину та знак коефіцієнта загасання хвилі першого роду та характер дисперсії її фазової швидкості. Залежність коефіцієнта загасання хвилі першого роду від напруженості зовнішнього електричного поля є лінійною як для різних значень коефіцієнта пористості середовища, так і для коефіцієнта проникності. Зростання амплітуди зовнішнього електричного поля приводить до зменшення коефіцієнта загасання. Зі зменшенням коефіцієнта пористості середовища залежність фазової швидкості від напруженості зовнішнього електричного поля збільшується, тоді як зміна коефіцієнта проникності не впливає на таку залежність.

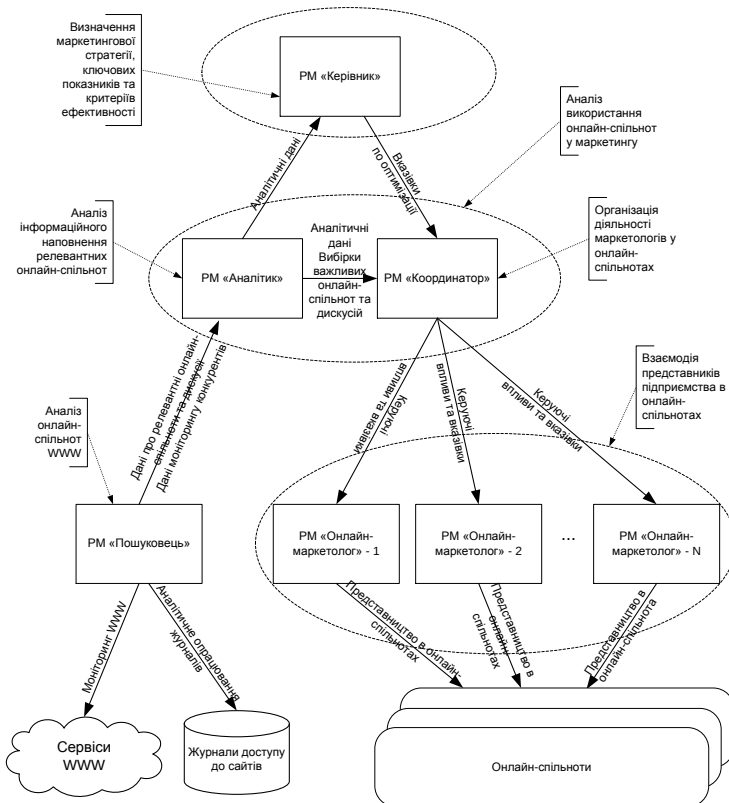
Встановлено, що залежність фазової швидкості та коефіцієнтів загасання від структурних параметрів пористих тіл можна використати для визначення цих параметрів. Отримані результати є важливими для розвитку сейсмoeлектричних досліджень земної кори і відповідно для знаходження глибин залягання корисних копалин.

1. *Горбачов Ю.И.* Геофизические исследования скважин / Ю.И Горбачов— Москва: Недра, 1990. — 400 с.
2. *Кобранова В.Н.* Петрофизика. / В.Н. Кобранова — Москва: Недра, 1986. — 392 с.
3. *Куликов В.А., Куликов Б.М., Подбережый М.Ю.* Многоволновая сейсморазведка: Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск 2007. Ч.3 : Методика и приложения к задачам нефтяной геологии. — 202.
4. *Основы сейсмoeлектроразведки / О.А. Потапов, С.А. Лизун, В.Ф. Кондрат и др.* — Москва: Недра, 1995. — 268 с.
5. *Твардовська С.Р.* Вплив зовнішнього електричного поля на хвильові процеси в пористих насичених розчином електроліту тілах / С. Р. Твардовська // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання–2012»: матеріали конференції (Львів, 23–25 травня 2012 р.) [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/42.pdf>
6. *Хмелевской В.К.* Геофизические методы исследования земной коры. Кн. 2: Региональная, разведочная, инженерная и экологическая геофизика. Учебное пособие. — Дубна: Международный университет природы, общества и человека «Дубна», 1999. — 184 с.

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ПІДТРИМКИ ДІЯЛЬНОСТІ ПРЕДСТАВНИКІВ ПІДПРИЄМСТВА В ОНЛАЙН-СПІЛЬНОТАХ

Структурна схема системного комплексу автоматизації діяльності маркетологів в онлайн-спільнотах представлена на рисунку.



Для обліку даних онлайн-спільнот та дискусій у комплексі використовується база даних «Інформаційні потоки», структура якої базується на побудованій формальній моделі онлайн-спільнот.

Залежно від обраної стратегії використання онлайн-спільнот у маркетинговій діяльності окремі робочі місця чи їхні функції можуть бути не задіяні. У разі обмеженості людських ресурсів, їх недовантаженості та інших організаційних аспектів можливе задіявання одного фахівця на кількох робочих місцях, якщо зведена функціональність не порушує логіки системи загалом і не знижує ефективність процесу.

Обрана керівником стратегія є визначальною для таких процесів на інших робочих місцях комплексу, як:

- формування множини маркетингових термінів та критеріїв відбору важливих онлайн-спільнот (РМ «Аналітик»);
- визначення множини релевантних для маркетингу онлайн-спільнот (РМ «Пошуковець»);
- розподілу представників підприємства для роботи з онлайн-спільнотами (РМ «Координатор»);
- аналізу інформаційного наповнення онлайн-спільнот (РМ «Аналітик»);
- формування маркетингових повідомлень та участь у дискусіях на сайтах важливих онлайн-спільнот (РМ «Онлайн-маркетолог»).

Процес пошуку та опрацювання релевантних онлайн-спільнот та дискусій базується на використанні можливостей глобальних пошукових систем, параметризація пошуку забезпечується використанням синтаксису розширених запитів. Для автоматизації розбору вмістимого типових сторінок дискусій з метою виявлення в них потрібної інформації використовуються шаблони HTML-сторінок у вигляді правил регуляризації.

Окремою важливою функцією аналітика є аналіз інформаційних потоків на сайтах підприємства і релевантних спільнот та ідентифікація загроз для організації, які виникають через некваліфіковану та зловмисну діяльність в онлайн-спільнотах.

Для отримання найкращого розподілу представників підприємства між сайтами онлайн-спільнот та керування процесом взаємодії використовуються методика, яка базується на апараті теорії координації.

Спрощення рутинних дій фахівців у онлайн-спільнотах досягається використанням збережених у БД шаблонів типових дописів, які формуються у результаті аналізу правил та традицій онлайн-спільнот.

На робочих місцях «Координатор» та «Аналітик» формуються аналітичні дані, які дозволяють оцінити ефективність використання комунікаційних можливостей середовища онлайн-спільнот для поширення маркетингової інформації та спілкування зі споживачами. Аналіз ефективності комунікацій у поєднанні із аналізом затрат на діяльність представників підприємства в онлайн-спільнотах дають змогу керівництву переглядати стратегію використання віртуальних середовищ, планувати маркетингові заходи та ресурси для їх реалізації.

ПРО МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ СКЛАДНИХ ІЄРАРХІЧНО-МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Під складною ієрархічно-мережевою системою (СІМС) ми розуміємо систему, кожна підсистема якої на певному рівні ієрархії є підмережею мережі нижчого рівня ієрархії. Ієрархія у таких системах зазвичай формується на основі просторового розміщення об'єктів, які їх утворюють, та (або) принципах організації системи управління. Складність системи є поняттям відносним, зокрема, чим більше рівнів розбиття системи на підсистеми, кількість та своєрідність об'єктів, які їх утворюють, набір реалізованих ними функцій, число взаємодій з іншими об'єктами, множинність та різноманітність реакцій на вплив зовнішніх та внутрішніх чинників, тим складніша система загалом. СІМС знаходять своє застосування практично у всіх сферах діяльності людини – на транспорті (залізнична та авіаційна системи, автотранспортні мережі великих міст чи регіонів країни), постачанні та логістиці (системи електро-, газо-, нафто-, тепло- та водопостачання, торгівельні мережі), у інформаційному забезпеченні та зв'язку (інтернет, телебачення, радіо, преса, стаціонарний та мобільний телефонний зв'язок, пошта), в економіці (мережі державних чи (та) приватних підприємств, їх постачальників та реалізаторів готової продукції), фінансах (банківські та страхові мережі, системи переказу грошей), освіті та охороні здоров'я тощо. Від стану та якості функціонування таких систем у значній мірі залежить рівень життя громадян, ефективність економіки та можливості її розвитку, готовність державних структур до подолання наслідків техногенних катастроф чи стихійних лих, зрештою, вони є свідченням розвитку країни загалом.

Методи оцінювання можуть базуватися на детерміністичних, статистичних, стохастичних або гібридних підходах [1]. Кожний із них має свої переваги та недоліки. Детерміністичні методи формують оцінку реального стану та якості функціонування конкретного об'єкта системи. Якщо провести ретельний аналіз усіх об'єктів СІМС неможливо, використовують статистичні методи. При цьому формування обґрунтованого результату статистичних досліджень залежить від ретельності детерміністичного аналізу об'єктів, включених у вибірку. В умовах невизначеності або за неповної інформації про систему застосовуються стохастичні методи. При цьому попередні дані про розподіл ймовірностей також отримуються на множині результатів детерміністичних досліджень. Висновки, одержані з до-

помогою статистичних та стохастичних методів, дають можливість повернути увагу до основних проблем функціонування системи, наприклад, до найбільш розповсюджених хвороб населення у данному регіоні. Однак, статистичні та стохастичні методи у багатьох випадках не дозволяють виявити об'єкти, збої в роботі яких можуть призвести до виходу з ладу окремих підсистем чи системи загалом. Слід також враховувати, що існують системи, які вимагають застосування виключно детерміністичних методів оцінювання. Дійсно, ймовірнісний підхід до постановки діагнозу пацієнту чи перевірки бортових систем авіалайнера перед польотом не виглядає до речним.

При розробці методів оцінювання першочергову увагу приділяють процедурам агрегації. Однак, нечіткі чи однобічні локальні оцінки не дозволяють сформувати обґрунтований узагальнений висновок та побудувати точний прогноз поведінки системи навіть на короткострокову перспективу. Багатокритеріальний та багатопараметричний аналіз поведінки елементів системи є основою для формування об'єктивних кількісних оцінок на всіх рівнях ієрархії. Агрегація нівелює як позитивні, так і негативні результати локального оцінювання. Тому процедури узагальнення повинні супроводжуватися зручними засобами низхідного аналізу поведінки об'єктів системи.

На процес функціонування реальної СІМС впливають чисельні зовнішні та внутрішні фактори. Вони можуть створити ризики, які неможливо передбачити регулярними плановими дослідженнями. Тому особлива увага повинна приділятися неперервному моніторингу процесів, які протікають у системі. Загалом методи, які використовуються для оцінювання стану та якості функціонування СІМС повинні орієнтуватися на її тип, структуру, основне цільове призначення, рівень впорядкованості потоків та інші особливості.

Теорія оцінювання СІМС є складовою системного аналізу. З іншого боку, результати оцінювання служать об'єктивною та чи не найбільш вагомою підставою для прийняття обґрунтованого рішення щодо подальших дій відносно досліджуваної системи. При цьому інформативність оцінки, її зрозумілість та зручні процедури оперативного орієнтування у великій кількості отриманих висновків дозволяють приймати своєчасні організаційні та управлінські рішення. Відзначимо, що висновки, сформовані на основі детермінованого оцінювання системи, породжують значно меншу кількість альтернатив, ніж статистичного або стохастичного.

1. Polishchuk D. About evaluation of complex dynamical systems / D. Polishchuk, O. Polishchuk // Journal of Complex Systems. – 2013. – Article ID 204304. – 6 p.: Available. – <http://dx.doi.org/10.1155/2013/204304>.

ПРО ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ВИСНОВКІВ ПРО ЯКІСТЬ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Багатокритеріальний та багатопараметричний аналіз характеристик, які описують стан та процес функціонування елементів системи, здійснюється за допомогою методів локального оцінювання [1]. Основна проблема, яка виникає у результаті застосування цих методів, полягає у великій кількості отриманих висновків, сумарна кількість яких може сягати мільйонів одиниць. Зрозуміло, що такі об'єми інформації практично не піддаються оперативному аналізу та своєчасній реакції на виявлені недоліки, що у випадку реальних систем нерідко призводить до катастрофічних наслідків. Одним із способів вирішення цієї проблеми є застосування методів агрегації локальних оцінок, тобто побудова узагальнених висновків щодо стану та якості функціонування об'єктів системи різних рівнів ієрархії. У роботі аналізуються основні підходи до побудови таких висновків, визначаються їх переваги та недоліки та пропонується метод, який дозволяє формувати обґрунтовані узагальнення для мережевих систем із повністю впорядкованим рухом потоків, зокрема, залізничної транспортної системи.

Для побудови агрегованих висновків можна використовувати три підходи. Проілюструємо їх на найпростішому прикладі системи S , яка складається з N елементів s_n , $n = \overline{1, N}$. Нехай $e(s_n)$ – оцінка якості елемента s_n у шкалі $[e^{\min}, e^{\max}]$.

Якість системи $e(S)$ за першим підходом визначається якістю її «найслабшого» елемента, тобто

$$e^{(1)}(S) = \min_{n=\overline{1, N}} e(s_n).$$

Даний підхід використовується для оцінювання систем, збої в роботі елементів яких можуть призвести до виходу з ладу окремих підсистем або всієї системи загалом. Прикладами таких систем є людський організм, незадовільне функціонування окремих органів якого може призвести до летальних наслідків, тріщина в рейці колії може стати причиною залізничної аварії та зупинити рух на лінії тощо. Слід також враховувати, що незадовільно функціонуючі елементи у тій чи іншій мірі негативно впливають на пов'язані з ними об'єкти системи. Тому їх удосконалення чи заміна при-

зводить до оптимізації функціонування окремих підсистем системи загалом.

Другим та найбільш розповсюдженим підходом [1] є зважена лінійна агрегація оцінок, отриманих для підсистем кожного рівня ієрархії з врахуванням їх пріоритетності для отримання узагальненого висновку наступного рівня ієрархії. Для випадку розглянутої вище системи S ця оцінка отримується за співвідношенням

$$e^{(2)}(S) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{e}(s) \rangle_{R^N} / \langle \mathbf{p}, \mathbf{1} \rangle_{R^N}.$$

Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^N}$ – скалярний добуток в евклідовому просторі R^N , $\mathbf{e}(s) = \{e(s_n)\}_{n=1}^N$, $\mathbf{p} = \{\rho_n\}_{n=1}^N$ – вектор вагових коефіцієнтів, який визначає пріоритетність елементів системи, $\mathbf{1} = \{1\}_{n=1}^N$. Основним недоліком методу лінійної агрегації є нівелювання як позитивних, так і негативних оцінок. Розглянемо наступний приклад. Нехай для виготовлення певного пристрою необхідне постачання N рівноважливих комплектуючих. Навіть у випадку постачання 100 відсотків $(N-1)$ -ї з необхідних комплектуючих та 10 відсотків N -ї комплектуючої, можна виготовити лише 10% пристроїв. У той же час, оцінка, отримана з допомогою методу лінійної агрегації при $\mathbf{p} = \{1\}_{n=1}^N$, віднесена до стовідсоткової шкали $[e^{\min}, e^{\max}] = [0, 100]$, дає значення $e^{(2)}(S) = 100 - 90/N$. При великих значеннях N ця оцінка є близькою до 100%, що очевидно не відповідає дійсності. Зазвичай кращий результат отримуємо при поєднанні описаних підходів, а саме, після усунення виявлених під час застосування першого підходу недоліків, для отримання узагальненого висновку використовуємо метод лінійної агрегації.

Більш адекватний дійсності результат узагальнення отримуємо з допомогою методу нелінійної агрегації у якому для випадку розглянутої вище системи S оцінка її якості отримується за співвідношенням

$$e^{(3)}(S) = \prod_{n=1}^N e(s_n) / (e^*)^{N-1},$$

де $e^* = \sum_{n=1}^N e(s_n) / N$. Основним недоліком, суттєво обмежуючим використання третього підходу для оцінювання якості системи, є складність врахування пріоритетності об'єктів, які її утворюють. Для розглянутого вище прикладу при $N=3$ оцінки, отримані за допомогою розглянутих вище підходів, у відсотковій шкалі матимуть наступні значення: $e^{(1)}(S) = 10\%$, $e^{(2)}(S) = 70\%$, $e^{(3)}(S) = 20.4\%$.

1. Воронин А.Н. Метод многокритериальной оценки и оптимизации иерархических систем / А.Н. Воронин // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – т.43, №3. – С.84-92.

**СКІНЧЕНИЙ ТЕРМОЧУТЛИВИЙ ПОРОЖНИСТИЙ ЦИЛІНДР
ЗА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ З СЕРЕДОВИЩАМИ
ЗМІННИХ ТЕМПЕРАТУР**

Проблеми забезпечення надійного функціонування приладів та елементів конструкцій, які працюють у середовищах змінних високих температур і часто мають форму скінченного порожнистого циліндра є актуальними у багатьох галузях сучасної промисловості. Для забезпечення їх надійного функціонування вже на етапі проектування необхідно проводити детальний аналіз їх температурного поля та умов протікання теплообмінних процесів з повним урахуванням неоднорідності (зумовленої тим, що фізико-механічні характеристики матеріалів залежать від зміни температури), а також реальних умов взаємодії з довколишнім середовищем, температура якого не є сталою [1]. Такі достовірніші моделі приводять до розв'язування нелінійних задач теплопровідності за певних умов теплообміну із довколишнім середовищем [1, 2].

У даній роботі на основі моделі термочутливого тіла визначено температурне поле порожнистого циліндра скінченної довжини, через усі поверхні якого здійснюється конвективний теплообмін з середовищем високої температури. При цьому коефіцієнти теплообміну на обмежуючих поверхнях є різними, а температури середовищ є функційно-змінними. Показано ефективність застосування для розв'язання таких двовимірних нелінійних задач теплопровідності методу лінеаризувальних параметрів, який передбачає побудову розв'язку рівняння на змінну Кірхгофа з деякою лінійною умовою, що містить так званий лінеаризувальний параметр. Порівнянням знайденого розподілу температури з його розподілом отриманим на основі лінійної моделі (коли коефіцієнт теплопровідності сталий і рівний опорному чи середньоінтегральному значенню) показано вплив на цей розподіл термочутливості матеріалу.

1. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочутливих тіл / *Кушнір Р.М., Попович В.С.* – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.

2. *Попович В., Заводовська Н.* Температурне поле скінченного термочутливого циліндра за конвективного теплообміну з середовищами змінних температур // Вісник ТНТУ. – 2013. – № 4. – С. 252-260.

НЕЛІНІЙНІ ДВОПАРАМЕТРИЧНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОБЛЕМИ НЕЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається один з чисельних методів для розв'язування нелінійних двопараметричних спектральних задач, які виникають при дослідженні проблеми неєдиності, галуження та біфуркації розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь, в яких коефіцієнти та граничні умови нелінійно залежать від двох спектральних параметрів. В основу методу покладається теорія неявних функцій, яка дає можливість чисельно знаходити зв'язні компоненти спектра нелінійних і голоморфних за спектральними параметрами оператор-функцій, визначених у банахових просторах. Нижче розглядається застосування цього методу до двох різних класів задач.

Перший з них полягає у дослідженні проблеми галуження розв'язків нелінійних двовимірних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, залежних від двох параметрів, що входять нелінійно у ядра інтегральних операторів. Досліджується нелінійна задача середньоквадратичної апроксимації дійсної невід'ємної функції $F(s_1, s_2)$ від двох змінних, визначеної на області $\Omega \in \mathbb{R}^2$, модулем подвійного інтеграла Фур'є

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint_G U(x, y) e^{-i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)} dx dy,$$

що залежить від дійсних параметрів c_1, c_2 . Задача апроксимації функції F формулюється як задача мінімізації функціонала

$$\min_{U \in L_2(G)} \sigma(U) = \|F - AU\|_{L_2(R^2)}^2 \equiv \|F - f\|_{L_2(R^2)}^2 \quad (1)$$

на гільбертовому просторі $H_U = L_2(G)$. Знаходження розв'язків задачі (1) зводиться до розв'язування нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна

$$f(Q) = \iint_{\Omega} K(Q, Q', \bar{c}) F(Q') e^{i \arg f(Q')} dQ', \quad (2)$$

де

$$K(Q, Q', \bar{c}) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_G \exp(i(c_1 x(s'_1 - s_1) + c_2 y(s'_2 - s_2))) dx dy, \quad Q = (s_1, s_2).$$

Для рівняння (2) характерними є неєдиність і галуження розв'язків, що залежать від величини параметрів (c_1, c_2) . Знаходження ліній галу-

ження зводиться до знаходження множини значень параметрів $\{c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\}$, при яких однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(Q) = T(c_1, c_2)\varphi \equiv \iint_{\Omega} \frac{F(Q')}{f_0(Q', c_1, c_2)} K(Q, Q', c_1, c_2) \varphi(Q') dQ' \quad (3)$$

має відмінні від тотожного нуля розв'язки. Ця задача належить до двовимірних нелінійних спектральних задач, сформульованих в операторній формі у такому вигляді

$$A(c_1, c_2)x = 0,$$

де $A(c_1, c_2)$ — голоморфна оператор-функція, визначена у банаховому просторі. Застосовуючи до рівняння (3) збіжний кубатурний процес, отримуємо апроксимаційну задачу $A_n(c_1, c_2)x_n = 0$ для наближеного знаходження власних значень і власних векторів у скінченновимірних просторах, яка зводиться до знаходження функцій, що задовольняють рівняння

$$\Psi_n(c_1, c_2) = \det(A_n(c_1, c_2)) = 0. \quad (4)$$

Чисельне знаходження розв'язків рівняння (4) зводиться до розв'язування відповідної задачі Коші

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_1}{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_2}, \quad c_2(c_1^{(0)}) = c_2^{(0)}.$$

Метод неявної функції застосовується до розв'язування лінійних та нелінійних двопараметричних спектральних задач, що виникають в теорії звичайних диференціальних рівнянь. Подаються результати досліджень розв'язків двоточної крайової задачі однорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку з нелінійним входженням спектральних параметрів у коефіцієнти рівняння та крайові умови.

Доведено теорему існування зв'язних компонент спектра розглянутих задач, отримано низку числових результатів.

1. Савенко П.А., Процах Л.П. Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы / Л. П. Процах // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 11 (546). — С. 41-44.

2. Савенко П.О., Процах Л.П. Чисельне розв'язування двоточної крайової задачі з нелінійним двовимірним спектральним параметром / Л. П. Процах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, №1. — С. 48-56.

3. Savenko P., Tkach M. Numerical Solution of Mean-Square Approximation Problem of Real Nonnegative Function by the Modulus of Double Fourier Integral / M. Tkach // Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 2, No. 2. — P. 1076-1090.

(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ)

МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗІСТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ БЕЗМЕЖНОГО НЕРІВНОМІРНО НАГРІТОГО ТРИСКЛАДОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТІЛА

Прогнозування термопружної поведінки кусково-однорідних елементів конструкцій, які перебувають в умовах високих температур, зумовлює необхідність урахування температурної залежності їх термомеханічних характеристик. У даній роботі запропоновано підхід до розв'язання квазістатичних задач термопружності для безмежних трискладових термочутливих тіл за нерівномірного нагріву складових.

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z необмежене термочутливе трискладове тіло, на поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ якого виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження). В початковий момент часу у кожній складовій задано розподіл температури $t_{0,i}(z)$ ($i = 1, 2, 3$). Вважаємо, що коефіцієнти теплопровідності складових лінійно залежать від температури $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0,i}(1 + \beta_i t_i)$, коефіцієнти об'ємної теплоємності мають вигляд $c_v^{(i)}(t_i) = c_{0,i} c_i(t_i)$, а коефіцієнти температуропровідності є сталими в межах кожної області, що має місце для ряду металів [1]. На характер залежностей інших фізико-механічних характеристик обмежень не накладаємо. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле, напруження та переміщення.

Знаходження температурного поля зведено до розв'язання у просторі узагальнених функцій рівняння [2]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j), \quad (1)$$

за крайових умов

$$\theta(z, \tau) \Big|_{z \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad \theta(z, \tau) \Big|_{\tau=0} = \theta_0(z), \quad (2)$$

$$\text{де } \theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 [\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)] S(z - z_k), \quad \theta_0(z), \quad \lambda_0(z)$$

та $c_0(z)$ мають вигляд

$$p(z) = p_1(z) + \sum_{k=1}^2 [p_{k+1}(z) - p_k(z)] S(z - z_k),$$

$$F_{j+1}(\tau) = \left(1 - \beta_j \beta_{j+1}^{-1}\right) \left[\theta_{j+1}(z_j, \tau) - \beta_{j+1}^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_{j+1} \theta_{j+1}(z_j, \tau)} - 1 \right) \right],$$

$$\theta_i(z, \tau) = \frac{1}{\lambda_{0i}} \int_0^{t_i(z, \tau)} \lambda_t^i(x) dx - \text{змінні Кірхгофа, } \delta'(z) - \text{похідна від дельта-}$$

функції Дірака, $\theta_{0,i}(z) = t_{0,i}(z) + \beta_i t_{0,i}^2(z)/2$; індексу $i=1$ відповідають величини, які належать першій складовій $-\infty \leq z \leq 0$, $i=2$ – другій (проміжковому шару) $0 \leq z \leq h$, $i=3$ – третій $h \leq z \leq +\infty$.

За допомогою функцій Гріна розв'язок задачі (1), (2) подається у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \xi, \tau - \tau')}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\zeta) G(z, \zeta, \tau) \theta_0(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (3)$$

де $G(z, \zeta, \tau)$ - функції Гріна [3].

Апроксимувавши [2] функцію $F_{j+1}(\tau)$ лінійним сплайном та підставивши у (3) $z = z_j + 0$ ($j=1, 2$) і $\tau = \tau_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$), отримали рекурентну систему двох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_{j+1}(z_j, \tau_k)$. Розв'язавши її, знайшли вирази для змінної Кірхгофа, а на основі співвідношень $t_i(z, \tau) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(z, \tau)} - 1 \right)$ – для шуканого температурного поля.

Наведено співвідношення для визначення напружень та переміщень. Проаналізовано результати числових досліджень.

1. *Зиновьев В.Е.* Теплофизический свойства металлов при высоких температурах. - Справ. М., - 1989. - 384 с.

2. *Процюк Б.В.* Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком. // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. Вып. 38 – С. 63-69.

3. *Процюк Б.В., Верба І.І.* Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – Вип. 1, 1999. – С. 200-205.

(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ)

ВИСОКОТОЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ І ЇХ ПОХІДНИХ НЕОРТОГОНАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

На основі методу найменших квадратів (МНК) запропоновано методику використання неортогональних функцій, яка дає можливість створити нові ефективні і високоточні алгоритми апроксимації та розв'язання різноманітних прикладних задач. Як приклад, розглянуто неортогональну на проміжку $[a, b]$ систему косинусів і синусів

$$\varphi_0(x) \equiv 1; \quad \varphi_k(x) = \cos(k\omega x), \quad \varphi_{k+M}(x) = \sin(k\omega x), \quad k = \overline{1, M}, \quad (1)$$

де $\omega = 2\pi/(B-A)$; $[a, b] \subset [A, B]$. Проміжок $[A, B]$, на якому система функцій (1) є ортогональною вибирається суттєво більшим від проміжку $[a, b]$, $B-A = 3(b-a) + d$. Система функцій (1) на проміжку $[a, b]$ буде повною, але неортогональною.

Апроксимація неперервної функції $f(x)$

$$f(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(x), \quad (2)$$

де c_k – невідомі коефіцієнти. Згідно з МНК, коефіцієнти c_k визначимо із умови найкращого виконання співвідношення (2), яка приводить до знаходження мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\Psi_N\{c_0, \dots, c_N\} = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\}^2 dx = \sum_{k,j=0}^N c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=0}^N c_k V_k + P^2. \quad (3)$$

Мінімум форми (3) позначено $F(N)$. Встановлені числові критерії точності і збіжності запропонованого методу апроксимації.

Теорема 1. Якщо для любого $\varepsilon > 0$ існує N , таке що $F(N) < \varepsilon^2/4$, то $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(x)$ за нормою $C[a, b]$.

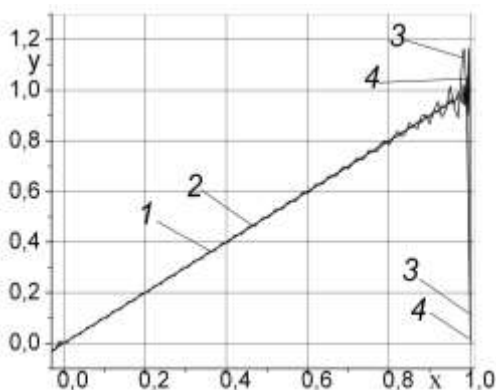
Одночасна апроксимація функції і її похідної.

$$\begin{aligned} \Psi_N &= \int_a^b \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=0}^N c_k \varphi'_k(x) - f'(x) \right\}^2 \right\} dx = \\ &= \sum_{k,j=0}^N c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=0}^N c_k V_k + P^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Мінімум форми (4) позначено $F(N)$.

Теорема 2. Якщо для любого $\varepsilon > 0$ існує N , таке що $F(N) < \varepsilon^2 / 4$, то $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(x)$, $f'(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi'_N(x)$ за нормою $L_2[a, b]$.

Для оцінки точності запропонованої методики на рисунку наведено порівняння з нею розкладу непарної функції $y = x$ за допомогою ортогональних на проміжку $[-1, 1]$ синусів і косинусів. Крива 1 – точне значення функції $y = x$, крива 2 – запропонована апроксимація за неортогональними синусами, кількість членів $N = 6$, $d = 0,4$, максимальне відхи-



лення від точного розв'язку дорівнює

$\delta(1) = 2,948 \cdot 10^{-5}$ і є в точці $x = 1$. Візуально точний і наближений розв'язок, криві 1, 2 на рисунку збігаються на всьому проміжку $x \in [-1, 1]$.

Крива 3 – розклад за ортогональними на проміжку $x \in [-1, 1]$ функціями $\sin k\pi x$, $N = 60$, $\delta(1) = 1$, максимальне значення наближеного розв'язку $y_m = 1,161$. Крива 4 – розклад за ортогональними синусами $N = 300$, $\delta(1) = 1$, $y_m = 1,056$. Наведемо похибки апроксимації за ортогональними функціями при $N = 50000$: на проміжку $x \in [-0.8, 0.8]$, $\delta < 3 \cdot 10^{-5}$; $\delta(0,98) = 0,0002$; $\delta(0,999) = 0,004$; $\delta(1) = 1$.

Отже, при апроксимації лінійної функції, шість неортогональних синусів забезпечує вищу точність, чим 50000 ортогональних синусів.

Встановлено, що використання неортогональних (з розширеним проміжком ортогональності) функцій дає більше ніж у 10^4 разів вищу точність, чим за використання такої ж кількості ортогональних функцій.

АНАЛІЗ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ

У роботі [4] та інших роботах цих же авторів побудовано математичну модель гетеродифузії та показано, що вона є ефективною основою для побудови програмних засобів прогнозування поширення забруднень у ґрунтовому середовищі. Для автоматизації проведення обчислювальних робіт вигідно використовувати числові методи. Це знімає багато обмежень і сприяє алгоритмізації обчислювального процесу. Проте використання числових методів пов'язане з проблемами достовірності, збіжності та точності результатів [1, 2]. Вирішити ці проблеми можна шляхом теоретичних досліджень варіаційного формулювання задачі [1, 3], а також шляхом проведення відповідних обчислювальних експериментів

Розглянуто одновимірну за просторовими змінними задачу гетеродифузії, записану у матричній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} + A c &= f \text{ в } \Omega \times (0, T], \\ \Omega &= [\xi^b, \xi^e], \quad \Gamma = \{\xi^b, \xi^e\}, \quad c(\xi, \tau) = 0 \text{ на } \Gamma \times (0, T], \\ c(\xi, \tau) &= c^{(0)} \text{ для } \tau = 0, \xi \in \Omega. \end{aligned}$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + a & -d_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \\ -d_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - a & -d \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \end{pmatrix}, \quad c^{(0)} = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Записано її варіаційне формулювання у вигляді. Знайти функцію $c(\xi, \tau) \in L_2(0, T; V)$ таку, що задовольняє рівняння

$$m(\dot{c}, \tilde{c}) + a(c, \tilde{c}) = l(\tilde{c}), \quad \forall \tilde{c} \in V,$$

$$m(c, \tilde{c}) = m(c^{(0)}, \tilde{c}), \quad \tau = 0, \xi \in \Omega,$$

$$V = \{c_i : c_i \in W_2^1, c_i(a) = 0, c_i(b) = 0, i = 1, 2\}$$

$$m(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}) = \int_{\Omega} \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{c}} d\Omega, \quad a(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}) = \int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{c})^T \tilde{\mathbf{c}} d\Omega, \quad l(\tilde{\mathbf{c}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{c}} d\Omega,$$

$$\dot{\mathbf{c}} = \partial \mathbf{c} / \partial \tau.$$

Доведено теореми.

Теорема 1. Білінійна форма $a(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}})$ є неперервна за своїми аргументами, тобто

$$(\mathbf{A}\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}})^2 \leq M \|\mathbf{c}\|_{W_2^1}^2 \|\tilde{\mathbf{c}}\|_{W_2^1}^2,$$

де $M = \text{const}$, $M > 0$;

Теорема 2. Білінійна форма $a(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}})$ є V-еліптичною, тобто виконується нерівність

$$(\mathbf{A}\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq \alpha \|\mathbf{c}\|_V^2.$$

Таким чином, доведені властивості білінійних форм слабкого формулювання початково-крайової задачі нестационарної гетеродифузії для системи двох диференціальних рівнянь дають можливість підійти до вирішення питання існування та єдиності її слабкого розв'язку. Шляхом проведення обчислювального експерименту на основі застосування напівдискретного методу скінченних елементів [3] показано, що для задачі, яка розглядалася, досягається швидко спадна з ростом числа скінченних елементів відносна похибка наближеного числового розв'язку у порівнянні з аналітичним розв'язком [4].

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. — Москва: Мир, 1974. — 126 с.

2. Савула Я., Горський А., Федак М. Аналіз методом скінченних елементів початково-крайових задач гетеродифузії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2013, Вип.18, с. 180-188.

3. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.

4. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛОМ, 2003. — 128 с.

О.С. Сахарчук, Г.Г. Цегелик

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ЕФЕКТИВНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ
МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛОГАРИФМІЧНО
ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ**

В [2] розглянуто побудову апарату неklasичних мажорант та діаграм Ньютона функцій однієї й двох дійсних змінних, заданих таблично, та його використання для побудови чисельних методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій. В [1] апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона використано для розробки чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких, розривних і дискретних логарифмічно вгнутих функцій однієї, двох і багатьох дійсних змінних.

В доповіді розглядається модифікація чисельного методу оптимізації логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних, приведено алгоритм використання цього методу для відшукування екстремуму як гладких, так і негладких логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних, заданих в деякій області.

Встановлюються такі основні переваги цього методу над класичними та їхніми модифікаціями:

- оптимізаційна функція може бути як гладкою, так і негладкою, розривною та дискретною;
- для роботи методу не обов'язково знати область, в якій міститься точка екстремуму;
- збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення;
- простота та наглядність методу.

У доповіді також приведено приклади використання даного методу для знаходження екстремуму логарифмічно вгнутої функції $f(x,y)$, визначеної в області $D=\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, яка може бути як гладкою, так і негладкою.

1. *Глебена М.І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук : спец. 01.05.02 Математичне моделювання та обчислювальні методи / М.І. Глебена. - Івано-Франківськ, 2012. - 23 с.

2. *Цегелик Г.Г.* Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. — 190 с.

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Нехай потрібно знайти всі дійсні розв'язки рівняння

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

в інтервалі $X \subseteq D$, де $f : D \subseteq R \rightarrow G \subseteq R$. Нами в просторі обмежених функцій введено поняття функціональних інтервалів $\{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$, де кусково – лінійні функції $\underline{l}(x), \bar{l}(x)$ такі, що $\underline{l}(x) \leq f(x) \leq \bar{l}(x)$ на інтервалі X ; арифметичні та теоретико – множинні операції над такими елементами; поняття віддалі, норми та ширини їх. Доведено, що квазілінійний простір $L(X)$ таких елементів при так введеній метриці є повним метричним простором, а так означені операції є неперервними та замкненими. На цій основі природнім чином трактується збіжність послідовностей таких елементів. Це дає можливість будувати та досліджувати інтервальні методи розв'язування широкого кола задач. Зокрема при розв'язуванні рівнянь та нерівностей попередньо будуюмо для функції $f(x)$ на інтервалі X лінійний функціональний інтервал $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$ у вигляді об'єднання елементарних лінійних функціональних інтервалів:

$$L(X) = \{[x_1, x_2], \underline{k}_1 x + \underline{m}_1, \bar{k}_1 x + \bar{m}_1\} \cup \{[x_2, x_3], \underline{k}_2 x + \underline{m}_2, \bar{k}_2 x + \bar{m}_2\} \cup \dots \cup \{[x_n, x_{n+1}], \underline{k}_n x + \underline{m}_n, \bar{k}_n x + \bar{m}_n\}.$$

Розроблені та досліджені алгоритми, які в результаті аналізу обмежених функцій цих елементарних лінійних функціональних інтервалів, виділяють інтервали інтервалу X , які, і лише вони, містять всі дійсні корені рівняння (1) з інтервалу X , чи розв'язки даної нерівності, відповідно. Після локалізації інтервалів, де є, або можуть бути корені рівняння (1) чи даної нерівності, відповідно, далі пошук коренів цього рівняння продовжуємо за описаним вище алгоритмом окремо в кожному з цих інтервалів.

(Львівський національний університет імені Івана Франка)

**ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З
ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ.**

Нехай $\Omega_+ \subset R^3$ деяка обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею S_0 . Тонке включення в області Ω_+ ми моделюємо розімкнутою двосторонньою ліпшицевою поверхнею S з краєм Γ , $\bar{S} = S \cup \Gamma$. Вважаємо, що $\bar{S} \subset \Omega_+$. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \bar{S}$, $\sigma(\Omega) = S_0 \cup S$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \sigma(\Omega) \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$.

В області Ω_+ розглянемо наступний диференціальний оператор:

$$L(t)u(x, t) = - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j}) + a_0(x, t)u(x, t),$$

де $a_{ij}, a_0 \in C([0, T]; L_\infty(\Omega_+))$, $a_0(x, t) \geq 0$, $x \in \Omega_+$, $t \in (0, T)$.

Вважаємо, що $L(t)$ є еліптичним, тобто існує така константа $\alpha > 0$, що для довільних $\lambda_i \in R$, $i = \overline{1, 3}$, $x \in \Omega_+$, $t \in (0, T)$ виконується умова:

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x, t) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2.$$

Розглянемо задачу Діріхле в області Q :

знайти функцію $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ таку, що

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(t)u = f \text{ в } Q, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0 \text{ в } \Omega. \quad (3)$$

Теорема. Нехай $L(t): H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ - неперервний еліптичний оператор. Тоді задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$ для довільних $f \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ та $u_0 \in L_2(\Omega)$.

Відзначимо, що рівняння (1) задовольняється в сенсі розподілів, а граничну умову (2) ми розуміємо як $u \in H_0^1(\Omega)$, $t \in (0, T)$.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНО-ВОЛОГІСНИХ ПОЛІВ ТА РЕОЛОГІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

Актуальність досліджень

Простіші реологічні моделі широко використовуються для опису спадкових властивостей різних середовищ в лінійній області. Будучи простими і наглядними, вони мають один важливий недолік – не враховують розмиття релаксаційного спектра. Це є властивим для реальних матеріалів, що в свою чергу враховується у фрактальних моделях. Особливість фізичних систем з фрактальною структурою полягає в тому, що для них істотні такі властивості, як: ефект “пам'яті”, складна природа просторових кореляцій та ефекти самоорганізації. Створення адекватних математичних моделей для систем з фрактальною структурою також вимагає залучення нетрадиційних підходів, заснованих на застосуванні математичного апарату диференціальних рівнянь дробового порядку [1,2].

Постановка задачі

Математична модель розподілу неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком [2]:

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial^\alpha T}{\partial \tau^\alpha} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \varphi_0 r \frac{\partial^\alpha U}{\partial \tau^\alpha} \\ \frac{\partial^\alpha U}{\partial \tau^\alpha} = a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + a_1 \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + a_2 \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \end{cases} \quad (1)$$

з відповідними початковими умовами та граничними умовами 3-го роду

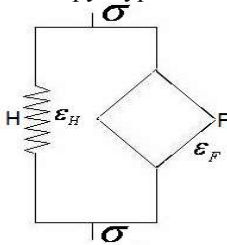
$$T|_{\tau=0} = T_0(x); \quad U|_{\tau=0} = U_0(x) \quad (2)$$

$$\begin{cases} \lambda_i \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta(U|_{x_i=l_i} - U_p) = \alpha_i(T|_{x_i=l_i} - t_c) \\ a_i \delta \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + a_i \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} = \beta(U_p - U|_{x_i=l_i}) \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0; \quad a_i \delta \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} + a_i \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0; \quad (4)$$

Для моделювання напружено-деформівного стану деревини розглянемо основні динамічні та фізичні співвідношення, що описують її реоло-

гічну поведінку. Це можна зробити, розглянувши основні співвідношення найпростішої структурної одиниці матеріалу деревини.



$$\sigma = \sigma_H + \sigma_F$$

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_F$$

$$\sigma_H = E\varepsilon_H \quad (5)$$

$$\sigma_F = E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F \quad (6)$$

$$\sigma = E\varepsilon_H + E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F \quad (7)$$

Рис. 1. Фрактальна модель Фойгта

Фрактальну модель Фойгта, що складається з паралельного з'єднання пружного та фрактального елемента, зображено на Рис. 1. В основі пружного елемента лежить закон Гука (5), а фрактального – закон в'язкості Ньютона (6), що описується диференціальним рівнянням з похідною дробового порядку. Таким чином, співвідношення між напруженням σ та деформаціями можна записати у вигляді (7).

Також, зв'язок між компонентами деформацій та напружень можна зобразити за допомогою інтегрального рівняння Вольтера:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t \Pi(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau^\alpha; \quad \sigma(t) = E\varepsilon(t) + E \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau^\alpha$$

Підібравши ядра релаксації $R(t, \tau)$ та повзучості $\Pi(t, \tau)$ певним чином, ми можемо переходити від однієї фрактальної моделі до іншої.

Висновок

Використання математичного апарату інтегродиференціювання дробового порядку для моделювання процесу тепло- та масоперенесення і напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою у порівнянні з традиційними методами дозволяє врахувати ефект "пам'яті" середовища, розмиття релаксаційного спектру, складну природу просторових кореляцій та ефекти самоорганізації.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Соколовський Я., Шиманський В. Математична модель теплового перенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. –2012. – Вип. 16. – С. 133-142.

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ЛІКІВ У СТІНЦІ СУДИНИ.

Математичне та комп'ютерне моделювання фізіологічних процесів в організмі людини є актуальним напрямком наукових досліджень [2]. Дослідження задачі, що описує процес розповсюдження ліків у стінці судини при катетерному лікуванні атеросклерозу [4], дасть змогу оптимізувати процес лікування. Ліки являють собою сукупність наночастинок, кожна з яких містить інкапсульовані біоактивні речовини. Після поглинання наночастинок тканиною стінок судин, процес їх подальшого переносу відбувається в основному за рахунок процесу адвекції-дифузії, при якому вивільняються інкапсульовані ліки, що забезпечує терапевтичний вплив на цільовій ділянці артерії.

Нехай Ω – відкрита зв'язна обмежена множина в R^d , $d = 1, 2, 3$ з кусково-гладкою межею $\Gamma = \partial\Omega$, де $\partial\Omega$ складається з неперетинних Γ_D, Γ_N . Необхідно знайти C_1, C_2 – невідомі концентрації наночастинок і ліків, відповідно, які задовольняють головні рівняння змішаної моделі переміщення ліків:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} + \nabla \cdot (VC_1) - \nabla \cdot (K_1 \cdot \nabla C_1) + \sigma_1 C_1 = 0; \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} + \nabla \cdot (VC_2) - \nabla \cdot (K_2 \cdot \nabla C_2) + \sigma_2 C_2 = C_1 f. \end{cases} \quad (1)$$

а також початкові та граничні умови:

$$C_1(x, 0) = 0, \quad C_2(x, 0) = 0 \quad (2)$$

$$C_1 = g_1, C_2 = g_2 \quad \text{на } \Gamma_D \times (0, T) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} n \cdot (K_1 \cdot \nabla C_1) + \lambda_1 (C_1 - C_{1,\infty}) &= 0 \\ n \cdot (K_2 \cdot \nabla C_2) + \lambda_2 (C_2 - C_{2,\infty}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{на } \Gamma_N \times (0, T) \quad (4)$$

В рівняннях (1)-(4) K_1, K_2 – коефіцієнти дифузії (тензори другого рангу), V – поле швидкостей в стінці артерії; σ_1, σ_2 – сталі метаболізму наночастинок і ліків; f – рівень розчинності ліків на кожному наночастинку, залежний від часу [1]

Наведено варіаційне формулювання даної задачі, а також проведено теоретичні дослідження щодо коректності останньої задачі. Показано

неперервність та V-еліптичність відповідних білінійної і лінійної форми, що дає можливість підійти до вирішення питання про існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі [5]. Також проведено дослідження щодо стійкості та збіжності напівдискретних апроксимацій.

Раніше за допомогою числового експерименту було виявлено, що для реальних біологічних та хімічних числових параметрів, розв'язок, одержаний методом скінченних елементів з лінійними та квадратичними базисними функціями [3], є нестійкий, що обумовлено великим числом Пекле. Задачі зі значною перевагою адвекції над дифузією треба розв'язувати, застосовуючи спеціальні чисельні методи.

Один з них полягає у використанні апроксимацій функціями-бульбашками. На одновимірних скінченних елементах: $\Omega_* = \{\xi : -1 < \xi < 1\}$, які є відображеннями стандартних елементів з допомогою спеціальних співвідношень, будується послідовність базисних функцій:

$$\varphi_1 = \frac{1-\xi}{2}, \varphi_2 = \frac{1+\xi}{2}, \varphi_j = \Phi_{j-1}(\xi), j = 3, 4, \dots, p+1,$$

де Φ_j визначаються через поліноми Лежандра P_{j-1} :

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots$$

Тоді для невідомих C_1, C_2 можна записати такі апроксимації:

$$C_i = C_{i,k-1} \varphi_1(\xi) + C_{i,k} \varphi_2(\xi) + \sum_{j=3}^{p+1} a_j \varphi_j(\xi), \quad i = 1, 2$$

де $C_{i,k-1}, C_{i,k}, i = 1, 2$ – невідомі вузлові значення.

Числові розрахунки здійснюються на основі апроксимацій функціями-бульбашками різних порядків, в одновимірному випадку результати порівнюються з аналітичним розв'язком.

1. *Crank J.* The mathematics of diffusion. Second edn. – Oxford, Great Britain. – 1975.

2. *Formaggia L.* Mathematical models and numerical simulation of drug release in the vascular system. – Milano, Italy. – 2008.

3. *Hecht F.* FreeFEM++ un logiciel de resolution EDP en 2 et 3d. – Paris, France. – 2008.

4. *Shaolie Samira Hossain.* Mathematical modeling of coupled drug and drug-encapsulated nanoparticle transport in patient-specific coronary artery walls. – Texas, USA. – 2009.

5. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів, Україна. – 2004.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу Коші для розв'язування звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Припустимо, що в області $D = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}$ функція $f(x, y)$ є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою L . Шукатимемо чисельний розв'язок задачі (1), (2) на проміжку $[x_0, x_0 + a]$, де $a > 0$. Для цього на цьому проміжку виберемо систему точок $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$, $h = a/n$, і знайдемо наближені значення $y_1, y_2, \dots, y_n$ точного розв'язку в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Нехай $y = y(x)$ – розв'язок задачі (1), (2). Підставимо його в рівняння (1), одержимо тотожність

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Проінтегруємо цю тотожність на кожному з проміжків $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Дістанемо

$$y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx,$$

або

$$y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x)) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (3)$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $f(x, y(x)) > 0$ для всіх $x \in [x_0, x_0 + a]$. Використаємо апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [1]. Побудуємо для функції $f(x, y(x))$ на проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ мажоранту Ньютона $M_f^{(1)}(x)$ за двома точками $(x_{k-1}, f(x_{k-1}, y(x_{k-1})))$ і $(x_k, f(x_k, y(x_k)))$. Одержимо

$$M_f^{(1)}(x) = \left(A_k^{x_k - x} B_k^{x - x_{k-1}} \right)^{\frac{1}{h}},$$

де $A_k = f(x_{k-1}, y(x_{k-1}))$, $B_k = f(x_k, y(x_k))$.

Аналогічно на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ для функції $f(x, y(x))$ побудуємо мажоранту Ньютона $M_f^{(2)}(x)$ за точками $(x_k, f(x_k, y(x_k)))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}, y(x_{k+1})))$. Одержимо

$$M_f^{(2)}(x) = \left(B_k^{x_{k+1} - x} C_k^{x - x_k} \right)^{\frac{1}{h}},$$

де $B_k = f(x_k, y(x_k))$, $C_k = f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$.

Тепер підінтегральні функції $f(x, y(x))$ у формулі (3) замінімо відповідними мажорантами Ньютона. Дістанемо

$$y(x_{k+1}) = y(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} M_f^{(1)}(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} M_f^{(2)}(x) dx + R_{k+1},$$

де R_{k+1} – залишковий член. Обчисливши при $A_k \neq B_k \neq C_k$ інтеграли, для знаходження наближених значень $y_1, y_2, \dots, y_n$ розв'язку $y = y(x)$ задачі (1), (2) одержуємо формулу

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \left(\frac{f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})}{\ln(f(x_k, y_k)/f(x_{k-1}, y_{k-1}))} + \frac{f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_k, y_k)}{\ln(f(x_{k+1}, y_{k+1})/f(x_k, y_k))} \right), \quad (4)$$

де $k = 1, 2, \dots, n-1$, $y_0 = y(x_0)$.

При $A_k = B_k = C_k$ матимемо

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f(x_k, y_k).$$

Формула (4) є фактично рівнянням для знаходження значення y_{k+1} . Тому для обчислення y_{k+1} побудуємо ітераційний процес

$$y_{k+1}^{(l+1)} = y_{k-1} + h \left(\frac{f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})}{\ln(f(x_k, y_k)/f(x_{k-1}, y_{k-1}))} + \frac{f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(l)}) - f(x_k, y_k)}{\ln(f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(l)})/f(x_k, y_k))} \right),$$

де $k = 1, 2, \dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots$, $y_{k+1}^{(0)}$ – вибране нульове наближення.

1. Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія/ Г.Г. Цегелик. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2013. – 190с.

ПРО СУМІСНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ТА АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Побудова ефективних наближених методів розв'язання задач для рівнянь математичної фізики і пов'язані з ним питання існування та єдиності розв'язку є однією з важливих проблем обчислювальної математики.

Основним методом розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних є апроксимація рівняння системою алгебраїчних рівнянь або системою диференціальних рівнянь. Ці два види апроксимацій в літературі отримали назву методу сіток та методу прямих.

Метод прямих є проміжним між аналітичними і сітковими методами. Сутність методу полягає в тому, що для даного рівняння або системи диференціальних рівнянь у частинних похідних дискретизуються всі незалежні змінні крім однієї. Ця напівдискретна процедура дає систему звичайних диференціальних рівнянь, яка потім, як правило, чисельно інтегрується

Сингулярно збурена задача, це задача яка залежить від параметра (або параметрів) таким чином, що її розв'язок залежить нерівномірно коли параметр прямує до деякого граничного значення. Характер неоднорідності може змінюватися від задачі до задачі. Теорія сингулярних збурень знаходить широке застосування і, як і раніше, активно розробляється [1–4].

У доповіді пропонується розглянути можливість застосування асимптотичного методу до задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь після процедури напівдискретизації.

1. *Васильева А.Б.*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф.Бутузов – М.: Наука, 1973. — 272 с.

2. *Вишик М.И.*, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1957. – 12, № 5. — С. 3–122.

3. *Найфэ А.* Методы возмущений / А.Найфэ – Москва: Мир, 1976. — 456 с.

4. *Lions I.L.* Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal / I.L. Lions // Lect.Notes Math., 323, 12, 1973. – 540 p.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ
РОЗПАДНОЇ РЕЧОВИНИ В ШАРІ З ПЕРІОДИЧНО
РОЗТАШОВАНИМИ ТОНКИМИ КАНАЛАМИ**

Оперативне регулювання заходів із локалізації поширення радіоактивних забруднень потребує наявності апарату комп'ютерного моделювання таких процесів, яке базується на математичних моделях міграції речовин в тілах із складною внутрішньою структурою. Зокрема, при описі процесів масоперенесення у ґрунтах такі моделі повинні враховувати наявність тонких каналів швидкого переміщення домішкової речовини, в яких перенесення частинок відбувається як дифузійним так і конвективним механізмами [1], а також масообмін між різними станами забруднення і розпад мігруючих речовин.

Розглянуто міграцію розпадної домішкової речовини в шарі товщини x_0 , який складається з періодично розташованих областей двох типів: області Ω_1 з коефіцієнтом дифузії D_1 мають ширину $2L$, а Ω_2 з коефіцієнтом D_2 - $2l$, $L \ll l$, крім цього в областях Ω_1 враховано конвективне перенесення частинок зі швидкістю v . На поверхнях шару підтримуються сталі значення концентрацій, які можуть відрізнитись на поверхнях областей основного матеріалу і тонких каналів. Розглянуто неідеальні умови контакту на функцію концентрації.

На основі застосування відповідних інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в областях Ω_i з використанням контактних умов отримано розв'язки контактної-крайових задач конвективної дифузії розпадної речовини та отримано аналітичні вирази для її концентрацій в регулярних структурах.

На основі цих формул розроблено пакет програм та проведено числовий аналіз розподілів концентрацій в областях Ω_i залежно від усіх параметрів задачі. Розрахунки проводились у безрозмірних змінних $\xi = (k/D_1)^{1/2} x$, $\zeta = (k/D_1)^{1/2} y$, $\tau = kt$, де k - коефіцієнт розмірності [c^{-1}] [2]. Обчислення виконувались з точністю $\varepsilon = 10^{-7}$. При цьому прийняті такі базові значення параметрів: $\xi_0 = (k/D_1)^{1/2} x_0 = 10$, $\Lambda = (k/D_1)^{1/2} L = 0.1$, $\gamma = (k/D_1)^{1/2} l = 0.9$, $\hat{\lambda} = k/\lambda = 0.1$, $d = D_2/D_1 = 0.01$, $c_0^{(2)}/c_0^{(1)} = 0.1$,

$\eta_1/\eta_2 = 0.1$, де η_1/η_2 - відношення коефіцієнтів яке визначає величину стрибка концентрації на поверхні контакту областей Ω_i . Рис. 1 ілюструє поведінку функції, що описує розподіли $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ у різні моменти безрозмірного часу. Тут криві 1-5 відповідають значенням $\tau = 1; 3; 5; 10; 50$ на рис. 1a, а на рис. 1b - $\tau = 1; 3; 5; 10; 30$. Штрихові криві наведені для «малих» значень швидкості конвективного перенесення $\hat{v} = (k_2 D_1)^{-1/2} v = 0.2$, а суцільні – для «великих» $\hat{v} = 2$.

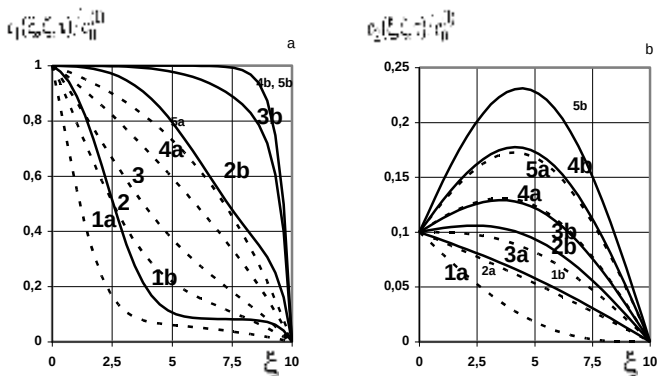


Рис.1. Розподіли концентрації розпадної речовини $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ в різні моменти безрозмірного часу τ

Зауважимо, що протягом усього процесу масоперенесення значення концентрації $c_1(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ в області Ω_1 не більше, ніж її значення, яке підтримується на поверхні Ω_1 , а в області Ω_2 спостерігається наявність локального максимуму $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$, який з часом зростає і стає глобальним в нижній половині шару, перевищуючи значення, які підтримуються на поверхні Ω_2 в рази (рис. 1b).

1. Chaplya Y. Advective-diffusive mass transfer in binary regular structures in the steady-state regime / Y. Chaplya, O. Chernukha, V. Dmytruk // Applied Math. Modelling. – 2013. – V. 37. – P. 6191-6211.

2. Чапля Є.Я. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах / Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. - К.: Наук. думка, 2009. – 302 с.

МАКСИМАЛЬНЕ ПОКРИТТЯ ГРАФА ПРОСТИМ ЦИКЛІЧНИМ ЛАНЦЮГОМ

У доповіді подано підходи до розв'язування задач максимізації, моделі яких можна подати у вигляді неорієнтованого неповного графа $G = (V, E)$ з числом вершин $n = |V|$, а сам граф вважаємо незваженим або з ребрами однакової ваги. Потрібно відшукати максимальний простий ланцюг між двома заданими вершинами V_a, V_b : $(V_a, V_1, V_2, \dots, V_k, V_b)$, $k \rightarrow \max$, $V_i \neq V_j$ при $i \neq j$, крім V_a і V_b . Розглядаємо випадок $V_a = V_b$, тобто треба побудувати максимальний простий ланцюг циклічного виду з метою отримати якнайбільше покриття графа і повернутись в початкову вершину. Такий клас задач стосується, наприклад, розрахунку транспортних потоків вантажних перевезень, планування систем комунікацій міста, укладання маршрутів в туристичній галузі тощо.

За основу методів розрахунку простого циклічного ланцюга максимальної довжини приймаємо алгоритм P_0^r рекурсивного виду, викладений в [1]. Алгоритм виконує перегляд усіх можливих простих ланцюгів, що починаються у довільній заданій вершині. Починаємо з визначеної вершини V_a . За один крок рекурсії алгоритм $P_0^r = P_0^r(i)$ буде одну наступну ланку простого ланцюга, починаючи з вершини i , $P_0^r(i) \rightarrow j$, якщо це можливо, і викликає рекурсивно $P_0^r(j)$. Рекурсія закінчується при поверненні до V_a . Побудова чергової ланки $P_0^r(i) \rightarrow j$ супроводжується викресленням вершини i та всіх інцидентних їй ребер з графа, що дозволяє ефективно організувати перебір можливих варіантів з обчислювальної точки зору. Приклад розрахунку – на рис.1.

На другому етапі розрахунків шукаємо максимальний простий циклічний ланцюг за умовою, що деякі зазначені вершини мають бути наявні в знайденому ланцюзі, або/і деякі вершини не повинні бути в знайденому ланцюзі [2]. Такі умови називаємо серединними, і в праці [2] визначено різні типи умов. Наприклад, умовою *типу 1* (або $[+1;0]$) називають вектор $Z = \{r_i(V_i)\}, i=1, 2, \dots, |M|$, де $r_i(V_i)=1$ для вершин i , які повинні входити до ланцюга L , і $r_i(V_i)=0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 1 усі вершини взаємно незалежні. Умову типу 1 застосовуємо у випадках, коли максимальний ланцюг має обов'язково

проходити через деякі фіксовані вершини, хоча порядок проходження через такі фіксовані вершини не визначений. Умова типу 1 дозволяє впливати на перелік вершин, обов'язкових до включення з певних міркувань зовнішньої задачі. Допускаємо випадок, коли множина $\{r_i(V_i) = 1\}$ не може бути реалізована одночасно і має бути відхилена.

На третьому етапі розрахунків шукаємо можливість побудови гаміль-

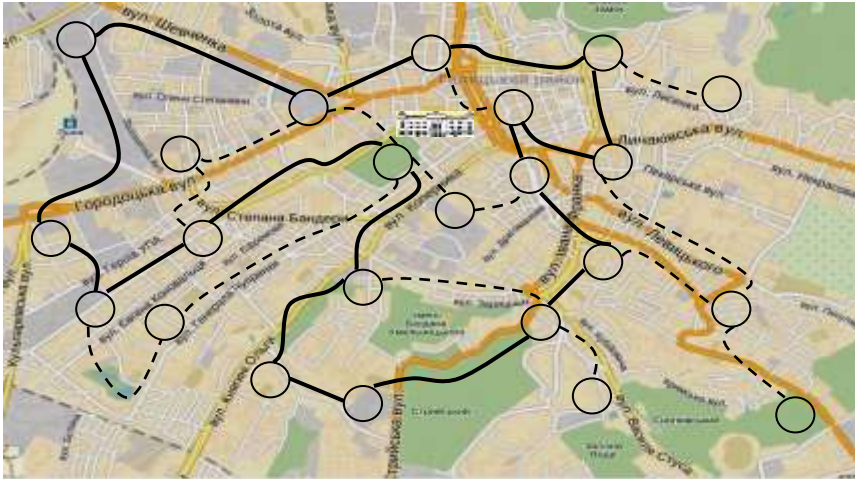


Рис.1. Циклічний ланцюг при $V_a = V_b = 1$ за алгоритмом $P_0^r(1)$

тонового циклу, якщо він не існує за структурою заданого графа. Отримати гамільтоновий цикл можна лише шляхом доповнення графа додатковими ребрами. Спочатку будемо за алгоритмом [1] початковий замкнений максимальний ланцюг заданого графа $G = (V, E)$. Після цього за розробленим алгоритмом Н1 виконуємо покрокове доповнення графа для додавання до максимального шляху ще не включених вершин. Алгоритм мінімізує кількість додаткових ребер і зберігає планарність чи товщину графа.

1. Черняхівський В.В. Рекурсивний алгоритм побудови максимального простого ланцюга неповного графа / В.В.Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 13. – С. 45–50.

2. Черняхівський В.В. Ізольовані серединні умови та їхні властивості для задачі максимізації побудови простого ланцюга графа / В.В.Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 109–117.

ЗАДАЧА ДИНАМІЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТА ВЛАСТИВОСТІ ЇЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ПОСТАНОВКИ

Дана робота присвячена чисельному моделюванню задач динамічної термопружності для процесу фрикційного зміцнення деталей зубчатим інструментом. З огляду на величину теплового потоку на поверхні деталі, має сенс [1] використовувати гіперболічне рівняння теплопровідності для врахування інтенсивних потоків та швидкостей зміни температури в околі цього джерела, за обґрунтуванням та деталями див. [2, 3].

Нехай пружне тіло, що займає обмежену зв'язну область Ω точок $x \in \square^d$ (де $d = 2$ або 3) з неперервною за Ліпшицем границею Γ , деформується з плином часу $t \in [0, T]$, $0 < T \leq +\infty$ під дією об'ємних сил $f(x, t) = \{f_i(x, t)\}_{i=1}^d$, поверхневих навантажень $\bar{\sigma}(x, t) = \{\bar{\sigma}_i(x, t)\}_{i=1}^d$, джерел тепла на поверхні тіла, які характеризуються інтенсивністю $\hat{h}(x, t)$. Для дослідження напружень та деформацій таких тіл достатньо визначити вектор пружних зміщень $u(x, t) = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$ і приріст температури $\theta(x, t)$ (відносно початкової температури T_0), які задовольняють фундаментальні рівняння задовольняє рівнянням руху

$$\rho(u_i'' - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

теплопровідності [2]

$$q_{i,i} = -L[\rho c_V \theta' + T_0 \gamma_{ij} \varepsilon'_{ij}] \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (2)$$

рівнянням стану

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ji}(u, \theta) = c_{ijkl} \{ \varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \theta \} + a_{ijkl} \varepsilon'_{kl}, \\ q_i = q_i(\theta) = -\lambda_{ij} \theta_{,j}, \\ L = 1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (3)$$

співвідношенням Коші

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (4)$$

а також крайовим

$$\begin{cases} u_i = 0 & i \in \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_u) > 0 \\ \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i & i \in \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u \\ \theta = 0 & i \in \Gamma_\theta \times [0, T], \Gamma_\theta \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_\theta) > 0 \\ q_i n_j = \hat{q} & i \in \Gamma_h \times [0, T], \Gamma_h = \Gamma \setminus \Gamma_\theta \end{cases} \quad (5)$$

і початковим умовам

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta'|_{t=0} = \zeta_0 \quad \text{в } \Omega \quad (6)$$

Тут $\rho = \rho(x)$ - густина, $c_V = c_V(x)$ - коефіцієнт теплоємності при постійній деформації, $\{a_{ijkn}\}, \{c_{ijkn}\}, \{\lambda_{ij}\}$ та $\{\gamma_{ij}\}$ - модулі пружності, в'язкості, теплопровідності та температурних напружень відповідно, $\alpha = \alpha(x)$ - коефіцієнт тепловіддачі у зовнішнє середовище, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ - температура зовнішнього середовища, .

Нижче приведено відповідну до (1–6) варіаційну задачу динамічної термопружності.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \theta_0, \zeta_0 \in Z, \quad (l, \mu) \in L^2(0, T; V' \times G); \\ \text{знайти пару } \psi = (u, \theta) \in L^2(0, T; V \times G) \text{ таку, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - b(\theta(t), v) = \langle l(t), v \rangle \\ s(L\theta'(t), \xi) + k(\theta(t), \xi) + b(\xi, Lu'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T] \\ c(u(0) - u_0, v) = 0, \quad m(u'(0) - v_0, v) = 0 \quad \forall v \in V \\ k(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad s(\theta'(0) - \zeta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G \end{array} \right.$$

Знайдено достатні умови коректності цього формулювання.

Наведені результати доповнюються порівнянням числових експериментів для класичної та релятивістської теплопровідності, які слугують основною вибору закону поширення тепла при фрикційному зміцненні.

1. Hetnarski R. Thermal stresses – advanced theory and applications / R.B. Hetnarski, M.R. Eslami // Solid mechanics and its application. – Springer, 2009. – Vol 158. – 559 p.

2. Ignaczak J. Thermoelasticity with Finite Wave Speeds / J. Ignaczak, M. Ostoja-Starzewski – Oxford Univ. Pres., 2009. – 432p.

3. Резников А.Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов / А.Н. Резников – М.: Машиностроение, 1981. – 281 с.

МЕТОД ФУНКЦІЙ СТИБКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ СМУГИ З ТОНКИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Реальні тіла мають різного типу дефекти структури. Поширеними дефектами у кристалічних тілах є тріщини, тонкі включення, прошарки. Поряд з цим сучасні композиційні матеріали є конструкційно неоднорідними. В якості арматури вони містять волокна і стрічки. У процесі навантаження біля вершин тонкостінних неоднорідностей виникає концентрація напружень, може розпочатися ріст і поширення тріщин, зароджується руйнування.

Розв'язана антиплоска задача теорії пружності для однорідної анізотропної смуги з паралельним до її меж тонким пружним анізотропним включенням. За методом функцій стрибка тонке включення вилучаємо з розгляду, а його вплив на напружено-деформований стан тіла моделюємо невідомими заздалегідь стрибками вектора напружень та похідної вектора переміщень на серединній лінії включення.

Повний розв'язок для смуги подамо у вигляді суперпозиції однорідного, породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включення, та збуреного розв'язків. У свою чергу збурений розв'язок є сумою основного збуреного розв'язку для безмежної площини з такими ж механічними властивостями і тим же включенням, що й у смугі, і збуреного коригувального, який повинен враховувати скінченність висоти смуги і не породжувати стрибків напружень та переміщень.

Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є отримано залежність напружено-деформований стану від зовнішнього навантаження і шуканих функцій стрибка.

Скориставшись умовами взаємодії анізотропних включення і середовища задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження функцій стрибка. Зазначимо, що у випадку обмежених середовищ, зокрема смуги, не вдається обчислити інтеграли і отримати оригінали у вигляді явних функцій. Тому збурений коригувальний розв'язок для смуги записується у квадратурах. Внаслідок цього, система сингулярних інтегральних рівнянь для смуги містить інтеграли від шуканих функцій, інтеграли типу Коші, а також ядра Фредгольма, які самі є інтегралами Фур'є. Систему сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано чисельно методом колокацій.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СЕРЕДНЬОЇ ТОЧКИ

Розглянемо динамічну систему, математична модель якої має вигляд:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Чисельне моделювання системи (1) методом середньої точки приводить до різницевих рівнянь:

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m + h\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}_{m+1} + \mathbf{x}_m}{2}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

де $\mathbf{x}_m$ - наближені значення $\mathbf{x}(t)$, обчислені на часовій сітці $\omega: \{t_{m+1} = t_m + h, h > 0, m = 0, 1, 2, \dots\}$.

Для лінійної системи (1) з постійними параметрами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3)$$

де $\mathbf{A}$ - дійсна постійна $n \times n$ матриця, метод (2) (як і метод трапецій, з яким він цьому випадку збігається) займає особливе місце. По-перше, він при будь-якому часовому кроці $h > 0$ зберігає характер положення рівноваги (стійкість-нестійкість). По-друге, для консервативної лінійної системи метод (2) є консервативним, тобто зберігає значення першого інтегралу системи при будь-якому $h > 0$ [1].

Для практики чисельного моделювання динамічних систем важливо вияснити наскільки ці властивості методу (2) поширюються на нелінійні системи (1).

В доповіді виділено клас нелінійних систем (1), з асимптотично стійким в цілому положенням рівноваги $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, для яких дискретна модель (2) є теж асимптотично стійкою в цілому при довільних кроках $h > 0$, а також клас консервативних систем (1), для яких метод (2) є консервативним при довільних кроках $h > 0$

1. Василенко Т. Числовий розрахунок нелінійних консервативних осциляторів / Т. Василенко, Л. Синицький, Я. Шмигельський // Журнал фізичних досліджень. 1997. Т.1. №4. – С.513-520.

ЩІЛИНА З РІДИНОЮ ВИСОКОГО ТИСКУ В ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ТІЛІ

Розглядається клас зв'язаних задач, який виникає у процесі моделювання напружено-деформованого стану гірських порід в околі родовищ рідких та газоподібних корисних копалин. Тиск, який чинить рідина або газ, що знаходиться у порожнинах земної кори, залежать від деформування гірських порід. У свою чергу, деформація спричиняється тиском всередині порожнини. Дослідженню розподілу напружень у двовірних пружних тілах з тріщинами (щілинами) присвячена значна кількість робіт. Більшість отриманих розв'язків стосуються тіл з щілинами канонічної форми, а запропоновані методи розв'язку можна застосовувати лише до певних класів задач.

Традиційне припущення про нестисливість рідини виключає можливість урахування потенціальної енергії рідини. Тому при моделюванні взаємодії деформівного тіла і рідини слід вважати рідину стисливою. Для більшості реальних рідин залежність густини від тиску у разі значних значень тиску є нелінійна. Нарешті, математична модель повинна брати до уваги і зв'язаний характер взаємодії рідини та тіла, коли тиск рідини спричиняє зміну напружено-деформованого стану, і навпаки, деформування твердого тіла впливає на зміну тиску у рідині [1].

Робота присвячена побудові математичної моделі взаємодії пружно-пластичного тіла, яке містить щілину з рідиною в умовах істотно високого тиску. Побудована методика числового розв'язання задачі та аналізу характерних особливостей сумісного деформування рідини та пружно-пластичного тіла.

Розглядається плоска деформація пружно-пластичного тіла (рис.1). Використовується теорія малих пружно-пластичних деформацій. Тіло вважаємо закріпленим знизу та з боків, верхня частина знаходиться під дією важкого штамп. Переміщення нижньої границі штампі вважаємо відомими. Всередині тіла міститься щілина, вщерть заповнена ідеальною стисливою рідиною. Тіло знаходиться під дією тиску на берега щілини, а також під дією гравітаційних сил.

При деформації тіла змінюється об'єм порожнини, що спричиняє зміну тиску рідини. У відповідності з експериментальними даними вважаємо, що між тиском у рідині та об'ємною деформацією існує однозначний зв'язок.

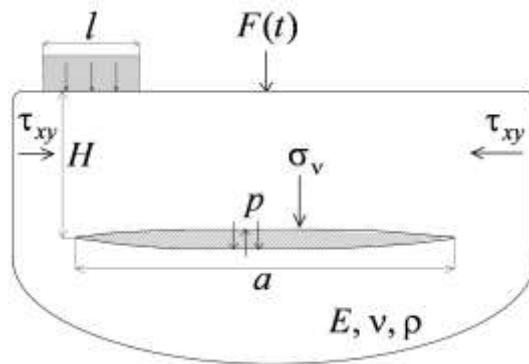


Рис.1. Взаємодія пружно-пластичного тіла та рідини

Взаємодія між деформівним тілом та рідиною подається у вигляді варіаційної задачі. Розв'язання крайових задач для деформівного тіла ґрунтується на формулюванні задач у вигляді варіаційних нерівностей.

Будується ітераційний процес змінного січного модуля, на кожному кроці якого розв'язується задача теорії пружності. Алгоритм числового розв'язання для задачі пружного тіла ґрунтується на варіаційному підході. Дискретизація здійснюється за допомогою методу скінченних елементів, а розв'язання задач умовної оптимізації – за допомогою узагальненого методу послідовної верхньої релаксації [2].

На основі створеного алгоритму розроблені програмні засоби для знаходження напружено-деформованого стану пружного тіла для досить широкого кола задач. Наводиться числовий розв'язок конкретної задачі плоскої деформації пружно-пластичного з щілиною, яке знаходиться під дією твердого штампу. Досліджено вплив дії штампу на напружено-деформований стан тіла.

1. Власенко Ю.С., Кузьменко В.І., Шумельчик К.І. Зв'язані контактні задачі механіки деформівного тіла// Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип.19. – с. 41-47.

2. K. Shumelchuk. Modeling of the stress state of an elastic body with cracks filled with compressible liquid or gas // Short papers from the conference 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics, 27-31 August 2013, Poznan, Poland. – Poznan, 2013 – MS13-11.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ В МОДЕЛЯХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нехай поведінка певної системи (процесу) моделюється задачею Коші для векторного звичайного диференціального рівняння:

$$y'(t) = f(t, y, u), \quad t \in (t_0, t_e], \quad (1)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

де $y(t) = [y_1(t), \dots, y_r(t)]^T$ - вектор-функція поведінки системи, $y \in Y$;
 $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$ - вектор-функція параметрів системи, які підлягають оптимізації, $u \in U$.

З використанням значень параметрів моделі u та знайдених з (1)-(2) функції поведінки системи y обчислюємо ряд характеристик системи $\psi_0(u), \psi_1(u), \dots, \psi_m(u)$. Зауважимо, що функції $\psi_i(u)$, $i = \overline{0, m}$ показують принципову залежність характеристик системи від параметрів оптимізації u . В більшості випадків характеристики системи поряд із залежністю від u містять залежність і від функції поведінки y , тобто, $\psi_i(u) = \tilde{\psi}_i(u, y)$, $i = \overline{0, m}$.

Один із заданих функціоналів (наприклад, $\psi_0(u)$) вибирається в ролі критерію мети. Інші в цей час відіграють роль обмежень і утворюють множину допустимих керувань $U_\partial = \{u : u \in U, \psi_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m}\}$. Задача оптимізації параметрів моделі (1)-(2) полягає в знаходженні функції $u_* \in U_\partial$ із умови мінімуму функціоналу $\psi_0(u)$ на множині допустимих керувань U_∂ :

$$\psi_0(u_*) = \min_{u \in U_\partial} \psi_0(u). \quad (3)$$

Задачу оптимізації (1)-(3) розв'язуємо шляхом її приведення до задачі нелінійного математичного програмування. У випадку використання градієнтних методів оптимізації виникає необхідність обчислення повних похідних $d\psi_i/du$, $i = \overline{0, m}$ характеристик системи за параметрами системи (аналізі чутливості).

Приведені результати розв'язування задач оптимізації та аналізу чутливості для ряду нелінійних моделей взаємодії популяцій та моделей "ресурс-споживач".

ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АДИТИВНОЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Обернена задача на власні значення полягає у відновленні матриці певної структури на основі заданих спектральних даних. Одним із різновидів такої задачі є адитивна обернена спектральна задача.

Нехай задано матриці $A_0, A_1, \dots, A_m \in R^{n \times n}$ та набір дійсних чисел $\lambda^* = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*\} \in R^m$. Знайти параметри $c^* = \{c_1^*, \dots, c_m^*\} \in R^m$, при яких власні значення матриці $A(c) = A_0 + c_1^* A_1 + \dots + c_m^* A_m$ задовольняють умові $\lambda_1 = \lambda_1^*, \dots, \lambda_m = \lambda_m^*$.

Питання практичної застосовності задачі, існування її розв'язку та чисельних методів її розв'язання досліджено у літературі [1], [2].

Користуючись означенням власного значення матриці $A(c)$, перейдемо до багатопараметричної спектральної задачі $T(c)x = 0$, $x \in E^n$, $x \neq 0$. У роботі [3] доведено, що у відповідність цій задачі можна поставити еквівалентну задачу мінімізації деякого функціонала $F(u) \rightarrow \min_u$, $u = \{x, c\} \in U$, $u \neq 0$, $F(u) = \frac{1}{2} \|T(c)x\|_H^2$, $U \subset H \equiv E^n \oplus E^m$.

Далі, для відшукування наближеного розв'язку отриманої варіаційної задачі застосуємо ітераційний процес, що базується на градієнтній процедурі та методі Ньютона і описується формулою

$$u_{k+1} = u_k - F(u_k) / \|\nabla F(u_k)\|_H^2 \nabla F(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1. BAI Zheng Jian Numerical Methods for Inverse Eigenvalue Problems, - The Chinese University of Hong Kong, 2004
2. Friedland S., Nocedal J., Overton M. The Formulation and Analysis of Numerical Methods for Inverse Eigenvalue Problems, - Technical Report, 1985
3. Подлевський Б.М., Хлобистов В.В. Градієнтний метод розв'язування багатопараметричних спектральних задач // Доп. НАН України. – 2012. – № 8. – С.22-27.

**ЗАСТОСУВАННЯ H-АДАПТИВНОЇ СХЕМИ МСЕ-МГЕ У
ЗАДАЧАХ ПРУЖНОСТІ З ОСОБЛИВОСТЯМИ**

Комп'ютерне моделювання задач теорії пружності на протязі уже багатьох років активно використовується як і при розв'язуванні практичних інженерних задач, так і в наукових дослідженнях. З наявності таких ефективних інструментів, як метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ), ця сфера є високорозвинутою і перспективною. Одним із напрямків сучасних досліджень є побудова адаптивних схем згаданих чисельних методів для отримання бажаної точності та зменшення обчислювальних затрат. Запропонована в роботі [2] оцінка похибки напружень МСЕ дозволяє побудувати h-адаптивну схему, що забезпечує отримання сіток скінченних та граничних елементів, які ефективно відображають наявні особливості в задачах (див. Рис. 1). У роботі [1] обґрунтовано точність розв'язку, отриманого за допомогою запропонованої схеми при виконанні певних припущень.

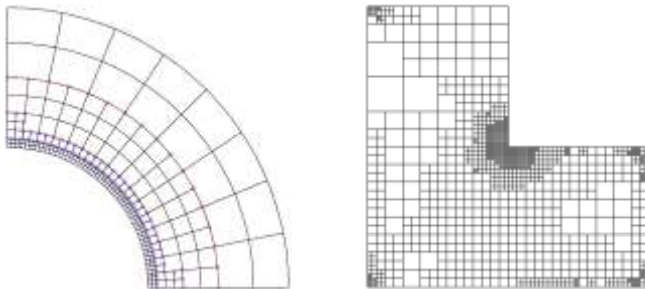


Рис.1. Приклади результатів роботи h-адаптивного алгоритму.

Застосування вищезгаданого адаптивного алгоритму можливе у задачах різних класів. Так, окрім звичних задач пружності проведено дослідження використання цього підходу у задачах контакту пружних тіл[3]. Результати показали, що алгоритм ефективно виділяє особливість задачі в області зони контакту. Також при чисельному дослідженні даної задачі було встановлено нові ефекти згущення. Запропоновано модифікації алгоритму, які дозволяють позбутись таких ефектів, якщо вони є небажаними.

Чисельні експерименти підтверджують теоретичні припущення про те, що використання h -адаптивної схеми МСЕ-МГЕ дозволяє зменшити обчислювальні витрати для отримання розв'язку із наперед заданою точністю.

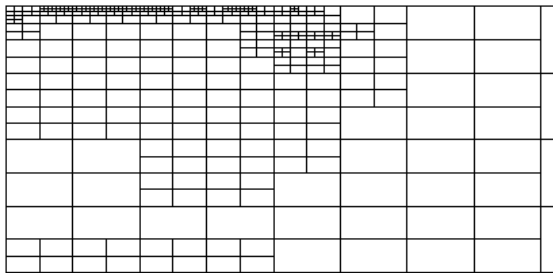


Рис.2. Частина адаптованої сітки скінченних елементів у задачі контакту пружних тіл.

1. Дияк І.І. Скінченно-граничноелементний оцінювач похибки МСЕ для задач теорії пружності / І.І. Дияк, Ю.О. Ящук // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2013. – Вип. 19. – С. 47-55.

2. Ящук Ю.О. Адаптивний алгоритм чисельного дослідження задачі теорії пружності / Ю.О. Ящук // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2010. – Вип. 16. – С. 96–105.

3. Ящук Ю.О. Решение задачи контактного взаимодействия с использованием h -адаптивного метода конечных элементов / Ю.О. Ящук, И. И. Прокопшин // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – Т.11. – С. 220 – 228.

АВТОРСЬКИЙ ПОКАЖЧИК

А–Z

Chapko R., 11
Drebotiy R., 13
Filchenko D.V., 15
Hodych O., 16
Johansson B.T., 11
Katernyak I., 18
Kokovska Y., 20
Kukharska N., 22
Kukharsky V., 18, 22
Loboda V., 18
Lyubchak V.O., 15
Malets R., 24
Ostapov O.Yu., 26
Savula Ya., 18, 22, 28
Shakhno S.M., 30
Shcherbyna N., 33
Shcherbyna Y., 16
Shynkarenko H., 24, 26, 31, 33
Stelmashchuk V., 31
Styahar A., 28
Trushevsky V., 33
Vahin P., 24
Venherskyi P., 35
Vovk O.V., 26
Yarmola H.P., 30
Yaroshevskaya M., 22

Б

Багнюк О.М., 48
Бедратюк Г.І., 37
Бедратюк Л.П., 37
Бернакевич І.Є., 38
Бехта М.І., 39
Бігун Р., 41
Білушак І.Ю., 146
Благітко Б.Я., 43
Бобрівник К.Є., 45
Болеста І.М., 46

В

Вагін П.П., 38
Вітер М.Б., 47
Власюк А.П., 48, 50, 52, 54, 55,
57
Вовк В.Д., 58
Воробель Р.А., 59

Г

Гайвась Б. І., 61
Гарасим Я., 117
Гірська О.З., 63
Глебена М.І., 65
Глухов Ю.П., 68
Гомон К.О., 70
Гончарук В.Є., 72, 146
Горлач В.М., 74
Горун О.П., 130
Григорова Т.А., 83
Грицько Б.Є., 76

Д

Давидок А.Є., 72
Дияк І.І., 78
Дмитрук В.А., 146
Добуляк Л.П., 79
Дорош А.Б., 81
Дроздовський Т.А., 50

Ж

Жуковський В.В., 52

З

Завацкая А.А., 83
Заводовська Н.О., 127

І

Іванків К.С., 85

К

Калиняк О.І., 109

Кардаш А.І., 86
Карпуша М.В., 115
Квик М.Я., 89
Кіндибалує А.А., 90, 92
Кічура С., 117
Клименко І.В., 74
Ковальчук О.В., 94
Колич І.І., 46
Колкевич А.О., 46
Копитко М.Ф., 78
Коркуна Н.М., 63
Король Н.І., 85
Коссак О.С., 95
Краснюк Р.П., 96
Кузьменко В.І., 154
Кутя Т.В., 98
Кухарський В.М., 99

Л

Літинський С.В., 101
Лопух Н., 102

М

Мартинюк П.М., 98, 105
Матвій О.В., 103
Медвідь Н. В., 105
Мельничин А.В., 107
Михаськів В.В., 109
Мочульський Ю.С., 43
Музичук А.О., 101
Муха І.С., 110

Н

Нагірний Т.С., 111, 113
Назаренко О.М., 115
Недашковська А.М., 116
Новак В.М., 54

О

Остудін Б., 117

П

П'янило Я.Д., 119

Пелешин О.П., 121
Піддубна Л.А., 103
Поворознюк Н.І., 45
Погранична Х.Р., 78
Поліщук Д.О., 123, 125
Поліщук О.Д., 123, 125
Попович В.С., 127
Притула М.М., 90, 92
Процак Л.П., 128
Процюк Б.В., 130

Р

Ревенко В.П., 132

С

Савенко П.О., 128
Савула Я.Г., 134
Сахарчук О.С., 136
Сеник Ю.А., 111
Сеньо П.С., 137
Сибіль Ю.М., 138
Соколовський Я.І., 139

Т

Твардовська С.Р., 119
Ткач М.Д., 128
Торський А.Р., 134
Турчин Ю.І., 141

Ф

Федорчук Н.А., 55
Фундак Л.І., 143

Х

Холявка Я.М., 95

Ц

Цветкова Т.П., 57
Цегелик Г.Г., 41, 63, 65, 79, 89,
96, 107, 136, 143
Цимбал В.М., 145

Ч

Чапля Є. Я., 61
Чапля Є.Я., 72
Червінка К.А., 111, 113
Черевко І.М., 81, 103
Чернуха О.Ю., 72, 146
Черняхівський В.В., 148
Чир І.А., 150

Ш

Шевчук С.П., 152
Шиманський В.М., 139
Шинкаренко Г.А., 74

Шмигельський Я.А., 46, 153
Шот І.Я., 38
Шувар Р.Я., 46
Шумельчик К.І., 154

Щ

Щербатий М.В., 156

Я

Ярошко О.С., 157
Ящук Ю.О., 158

Збірник наукових праць

I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція

Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики

Матеріали конференції

Матеріали доповідей надруковано в авторській редакції
без внесення суттєвих змін оргкомітетом

Технічний редактор та
комп'ютерне макетування М. Ярошевська

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. Тираж 130 прим. Зам.

Видавець:
Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції: Серія ДК № 3059 від 13.12.2007р.